



THÈSE

En vue de l'obtention du

DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

Délivré par *l'Université Toulouse III - Paul Sabatier*
Discipline ou spécialité : *Mécanique des Matériaux*

Présentée et soutenue par **NGUYEN Dang Huy**
Le 23 octobre 2009

Titre : *Contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement des assemblages brasés. Couplage des méthodes DAR et X-FEM.*

JURY

POITOU A.
LEGUILLON D.
MOES N.
LABORDE P.
VODECOQ E.
BARLIER C.
DOUR G.
LAZARD M.
BILTERYST F.
LAMESLE P.

Professeur Ecole Centrale Nantes
Directeur de Recherche CNRS Paris 6
Professeur Ecole Centrale Nantes
Professeur IMP Toulouse
Maître de conférence ENSMA Poitiers
Professeur EMAC/InSIC
Maître Assistant, HdR, EMAC
Maître Assistant, Mines EMAC/InSIC
Maître Assistant, Mines EMAC/InSIC
Maître Assistant, Mines EMAC

Président du jury
Rapporteur
Rapporteur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Invité
Invité

Ecole doctorale : *M.E.G.E.P.*
Unité de recherche : *CROMEP – Ecole des Mines d'Albi*
Directeur(s) de Thèse : *DOUR Gilles*

N° d'ordre :

Année 2009-2010

THESE

Présentée à

L'INSTITUT SUPERIEUR D'INGENIERIE DE LA CONCEPTION

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE TOULOUSE

Spécialité : MECANIQUE DES MATERIAUX

Par

Dang Huy NGUYEN

**Contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement
des assemblages brasés. Couplage des méthodes DAR et X-FEM.**

Soutenance le 23 Octobre 2009 à 10H30, devant la Commission d'Examen

JURY :

Président du jury:	A. POITOU	Professeur Ecole Centrale Nantes
Rapporteurs:	D. LEGUILLON	Directeur de Recherche CNRS Paris 6
	N. MOES	Professeur Ecole Centrale Nantes
Examineurs:	P. LABORDE	Professeur IMP Toulouse
	E. VIDECOQ	Maître de Conférences ENSMA Poitiers
	C. BARLIER	Professeur EMAC/InSIC
	G. DOUR	Maître Assistant, HdR, EMAC
	M. LAZARD	Maître Assistant Mines EMAC/InSIC
Invités:	F. BILTERYST	Maître Assistant Mines EMAC/InSIC
	P. LAMESLE	Maître Assistant Mines EMAC

A nos parents

A ma femme, Thu Trang

A notre fille, Thuy Duong

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier chaleureusement mon directeur de thèse, Monsieur Gilles DOUR, qui m'a fourni des pistes très riches en développements, qui m'a guidé de façon dévouée dans ce travail et qui m'a encouragé gentiment. Il m'a aidé beaucoup sur le plan scientifique mais aussi humain, notamment lors des moments difficiles pendant la thèse.

Tous mes remerciements vont également à Madame Myriam LAZARD, ma directrice de thèse, pour ses soutiens actifs ainsi que pour le temps qu'elle m'a consacré pendant les trois ans de thèse.

Je veux associer dans un même remerciement Messieurs François BILTERYST et Pascal LAMESLE, mes tuteurs de thèse, qui ont encadré ce travail avec l'esprit de responsabilité.

Je remercie également les membres du jury qui ont accepté d'examiner ce travail et tout particulièrement les rapporteurs Messieurs Arnaud POITOU, Dominique LEGUILLON et Nicolas MOËS qui m'ont apporté de précieuses remarques.

Ma reconnaissance va aux collègues de deux centres CROMeP (Ecole Mines d'Albi) et ERMeP (GIP-InSIC) pour leur collaboration et leur soutien pendant ma thèse.

Résumé

Les assemblages stratifiés par procédé de brasage sont de plus en plus utilisés dans le secteur de l'outillage rapide appliqué à la fonderie, la plasturgie... Cette méthode d'assemblage permet par exemple des géométries originales et le placement de canaux de refroidissement à des positions optimales qu'il est impossible d'atteindre par perçage. Dans la plupart des cas d'application, les assemblages brasés doivent résister aux sollicitations mécanique et thermique en service. Cette recherche est une contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement des assemblages brasés aussi bien du point de vue mécanique que thermique. Les inconvénients des méthodes classiques de modélisation pour traiter des géométries complexes avec des zones raffinées très localisées (affinement extrême du maillage, temps de calcul excessif) nous ont poussés à rechercher une nouvelle méthode pour traiter les problèmes des assemblages brasés. En gérant la présence du joint dans l'assemblage sous forme d'une perturbation, nous avons proposé le couplage de deux méthodes: la méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) et la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). La construction de la partie enrichie de la X-FEM est basée sur les solutions proposées par la méthode des DAR suivant cinq variantes d'enrichissement. Les principes fondamentaux ainsi que les méthodes de mise en œuvre du couplage DAR-X-FEM sont présentés à travers le cas unidimensionnel des assemblages brasés. En appliquant la variante d'enrichissement la plus appropriée, le couplage DAR-X-FEM a été étendu par la suite pour modéliser le cas bidimensionnel des assemblages brasés. L'illustration du couplage DAR-X-FEM 2D a été effectuée pour les deux applications: transferts thermiques et chargement mécanique. Afin de mieux comprendre le comportement des assemblages brasés et de valider les résultats obtenus par le couplage DAR-X-FEM, une étude expérimentale a été présentée. Dans un premier lieu, les essais de brasage à haute température ont été effectués. En deuxième lieu, les éprouvettes d'assemblages brasés obtenues par brasage ont fait l'objet d'essais de caractérisation des propriétés mécaniques et thermiques. Enfin, la comparaison entre les résultats expérimentaux et de la modélisation a permis de vérifier la pertinence du couplage DAR-X-FEM proposé.

Mots clefs: méthode des éléments finis étendus (X-FEM), méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR), assemblage brasé, joint brasé.

Abstract

Laminar assembly by the means of the brazing process is becoming widely used in the field of rapid tooling used for die casting, plastic injection moulding... In most applications, the brazed assembly must withstand the in-service mechanical and thermal solicitations. This research is a contribution to the modelling and the characterisation of the behaviour of brazed assembly in both mechanical and thermal aspects. The deficiencies of the classical modelling methods when modelling of a complex structure with localised variations is concerned led us to search for a new method to treat the problems of brazed assemblies. Considering the presence of the joint in the assembly as a perturbation in a broad structure, we have proposed the coupling of two methods: the matched asymptotic expansions method (DAR) and the extended finite element method (X-FEM). The construction of the enriched part of the X-FEM is derived into five variants of enrichment using the perturbation solutions obtained by the DAR method. The basic principles and methods of implementation of the DAR-X-FEM coupling have been presented through the one-dimensional example of brazed assembly. Applying the most appropriate variant of enrichment, the DAR-X-FEM coupling was subsequently extended to the two-dimensional case of brazed assemblies. The illustration of coupling DAR-X-FEM 2D was performed for two problems: heat transfer and mechanical loading. To better understand the behaviour of brazed assembly and to validate the results obtained by the coupling DAR-X-FEM, an experimental study has been presented. Firstly, high temperature brazing tests have been carried out. Secondly, the brazed specimens were tested to characterize both mechanical and thermal properties. Lastly, the comparison between the experimental and the simulation results confirmed all the interest of the proposed coupling DAR-X-FEM.

Keywords: eXtended Finite Element Method (X-FEM), matched asymptotic development method (DAR), brazed assembly, brazed joint.

Table des matières

Chapitre 1 Introduction générale	21
1.1. Généralités sur les assemblages brasés.....	21
1.2. Méthodes de modélisation des assemblages	25
1.3. Objectifs de l'étude.....	27
Bibliographie.....	30
Chapitre 2 Méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) et méthode des éléments finis étendus (X-FEM).....	37
2.1. Méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR)	37
2.1.1. Problématique	37
2.1.2. Développement extérieur	40
2.1.3. Développement intérieur	42
2.1.4. Règle de raccordement	45
2.1.5. Applications mécaniques de la méthode des DAR	47
2.2. Méthode des éléments finis étendus (X-FEM).....	48
2.2.1. Généralités	48
2.2.2. Approximation de base.....	50
2.2.2.1. Méthode de partition de l'unité PUFEM.....	50
2.2.2.2. Approximation de la X-FEM.....	50
2.2.3. X-FEM dans la modélisation de fortes discontinuités	52
2.2.4. X-FEM dans la modélisation de faibles discontinuités.....	55
2.2.5. Programmation de la X-FEM	58
2.3. Conclusion.....	59
Bibliographie.....	62

Chapitre 3 Couplage des méthodes DAR et X-FEM pour la modélisation unidimensionnelle des assemblages brasés	69
3.1. Modélisation 1D à l'aide du couplage DAR – X-FEM d'un assemblage brasé en traction simple	69
3.1.1. Modèle unidimensionnel de l'assemblage brasé	69
3.1.2. Approche des DAR	72
3.1.2.1. Développement extérieur	72
3.1.2.2. Développement intérieur	73
3.1.2.3. Raccordement	73
3.1.2.4. Calcul des termes	74
3.1.3. Formulation de la X-FEM	76
3.1.4. Couplage DAR-X-FEM – Méthode relative aux fonctions enrichies.....	78
3.1.4.1. Principe du couplage	78
3.1.4.2. Différentes variantes d'enrichissement	80
3.1.4.2.1. Modèle analytique	81
3.1.4.2.2. Première variante.....	82
3.1.4.2.3. Deuxième variante.....	86
3.1.4.2.4. Troisième variante.....	89
3.1.4.2.5. Quatrième variante	92
3.1.4.2.6. Comparaison des variantes d'enrichissement et remarques sur la méthode relatives aux fonctions enrichies	94
3.1.5. Couplage DAR-X-FEM – Méthode relative aux paramètres d'enrichissement.....	97
3.1.5.1. Principe du couplage	98
3.1.5.2. Cinquième variante	101
3.2. Couplage DAR - X-FEM pour le problème thermique transitoire unidimensionnel de l'assemblage brasé.....	108
3.2.1. Modèle thermique unidimensionnel de l'assemblage brasé.....	108
3.2.2. Approche des DAR en régime permanent.....	109
3.2.3. Formulation variationnelle de la X-FEM pour le problème transitoire	110
3.2.4. Fonctions enrichies	114

3.2.5.	Validation à l'aide de la méthodes des quadripôles	115
3.2.6.	Application numérique	117
3.3.	Conclusion.....	120
	Bibliographie.....	122
 Chapitre 4 Couplage DAR et X-FEM pour le cas 2D des assemblages brasés ...		129
4.1.	Position du problème	129
4.1.1.	Modèle bidimensionnel de l'assemblage brasé	129
4.1.2.	Démarche adoptée pour le couplage DAR-X-FEM dans le cas 2D.....	131
4.1.2.1.	Approche des DAR	132
4.1.2.2.	Implémentation de la X-FEM.....	134
4.1.2.2.1 .	Formulation.....	134
4.1.2.2.2 .	Programmation.....	135
4.2.	Problème thermique.....	142
4.2.1.	Calcul général	142
4.2.2.	Applications numériques	146
4.2.2.1.	Cas 1	147
4.2.2.2.	Cas 2.....	152
4.3.	Problème mécanique.....	157
4.3.1.	Calcul général	157
4.3.2.	Applications numériques	159
4.3.2.1.	Cas 1	159
4.3.2.2.	Cas 2.....	167
4.4.	Conclusion.....	174
	Bibliographie.....	176

Chapitre 5 Etude expérimentale et validation des résultats	183
5.1. Essais de brasage à haute température des alliages d'apport à base de nickel.....	184
5.1.1. Choix des matériaux.....	184
5.1.1.1. Matériau de base	184
5.1.1.2. Alliage d'apport	184
5.1.2. Moyen de chauffage.....	186
5.1.3. Essais de définition des paramètres optimaux pour le brasage.....	188
5.1.3.1. Préparation des éprouvettes.....	188
5.1.3.2. Pression appliquée au cours du brasage	189
• Première variante	189
• Deuxième variante	189
5.1.3.3. Cycle de brasage	190
5.1.3.4. Résultats et configuration choisie	193
5.1.4. Essais de brasage.....	197
5.1.4.1. Préparation des éprouvettes	197
5.1.4.2. Cycle de brasage	199
5.1.4.3. Microstructure de l'assemblage brasé	199
5.2. Caractérisation des propriétés de l'assemblage brasé acier H11/alliage d'apport BNi-2..	201
5.2.1. Essais mécaniques.....	201
5.2.1.1. Machines d'essais	201
5.2.1.2. Essai de traction	203
• Epreuves	203
• Description de l'essai	205
• Résultats	205
5.2.1.3. Essai de compression	207
• Epreuves	207
• Description de l'essai	207
• Résultats	208

5.2.1.4. Essai de cisaillement	209
• Eprouvettes	209
• Description de l'essai	211
• Résultats	212
5.2.1.5. Essai de flexion	213
• Eprouvettes	213
• Description de l'essai	214
• Résultats	214
5.2.2. Mesure de la conductivité thermique	215
• Moyen et principe de mesure.....	215
• Echantillons	217
• Description de la mesure	217
• Résultats	218
5.3. Validation des résultats	219
5.3.1. Essai de traction	219
5.3.1.1. Identification.....	219
5.3.1.1.1 . Problème général d'identification	219
5.3.1.1.2 . Formulation.....	220
5.3.1.1.3 . Résultats.....	221
5.3.1.2. Confrontation	223
5.3.2. Essai de cisaillement	225
5.3.2.1. Identification.....	225
5.3.2.1.1 . Formulation.....	225
5.3.2.1.2 . Résultats.....	227
5.3.2.2. Confrontation	228
5.4. Conclusion.....	229
Bibliographie.....	231

Chapitre 6 Conclusion et perspectives.....	237
6.1 . Conclusion	237
6.2 . Perspectives.....	239
6.2.1 . Le cas où le joint est très "mou"	239
6.2.2 . Effet de bord.....	239
6.2.3 . Comportement local à l'intérieur du joint	240
6.2.4 . Couplage thermomécanique	240
6.2.5 . Géométrie plus complexe.....	241
6.2.6 . Comportement élastoplastique, fatigue et choc thermique	241
6.2.7 . Elargissement des applications du couplage DAR-X-FEM.....	242
Bibliographie.....	243
Annexe A Détails de calcul de la méthode des DAR.....	249
A.1. Problème thermique.....	250
A.2. Problème mécanique.....	254
Annexe B Courbes de température au cours du brasage	267
B.1. Disposition des thermocouples.....	267
B.2. Courbes de température	268

Chapitre 1

Introduction générale

Chapitre 1	Introduction générale.....	21
1.1.	Généralités sur les assemblages brasés	21
1.2.	Méthodes de modélisation des assemblages	25
1.3.	Objectifs de l'étude.....	27
	Bibliographie	30

Chapitre 1

Introduction générale

Ce chapitre introductif présente un état des connaissances relatives aux généralités sur les assemblages brasés ainsi qu'aux méthodes existant dans la littérature pour modéliser les assemblages en général et les assemblages brasés en particulier. En indiquant les inconvénients de ces méthodes, nous mettons en évidence la nécessité de proposer une méthode plus efficace pour modéliser les assemblages brasés en prenant en compte la présence du joint. L'objectif de ces travaux ainsi que les chapitres suivants sont résumés à la fin de ce chapitre.

1.1. Généralités sur les assemblages brasés

Les assemblages brasés sont des structures issues d'un procédé appelé le brasage sur lequel nous rappelons en quelques lignes les connaissances générales.

Le brasage est un procédé d'assemblage thermique pour des pièces de matériaux de base (métaux, alliages, céramiques, ...) au moyen d'un alliage d'apport qui est liquéfié et ensuite solidifié tandis que les matériaux de base restent à l'état solide. L'alliage d'apport fait une jonction chimique et physique avec les matériaux de base.

Le brasage est probablement une des méthodes les plus performantes d'assemblage aujourd'hui. Ce procédé possède des avantages marquants, tels que: la résistance et la ductilité des joints, la variété des alliages d'apport et des matériaux de base à braser, la variété des moyens de chauffage, l'automatisme du procédé ...

Selon la température de brasage, nous distinguons ses trois catégories principales (Maeder *et al.*): brasage tendre, brasage fort et brasage à haute température. Parmi les trois, le brasage à haute température est préféré pour les assemblages de haute résistance mécanique et thermique ou de haute performance contre la corrosion et l'oxydation. Pour ce type de brasage, les alliages à base de nickel sont fréquemment utilisés à cause du compromis entre les propriétés performantes et un coût raisonnable (Rabinkin, 2004).

Fort des avantages mentionnés ci-dessus, le brasage est largement utilisé dans plusieurs domaines d'application: automobile, métallurgie, navigation, construction navale, outillage, électronique ... Sur la Figure 1.1, quelques exemples d'applications du brasage sont présentés.

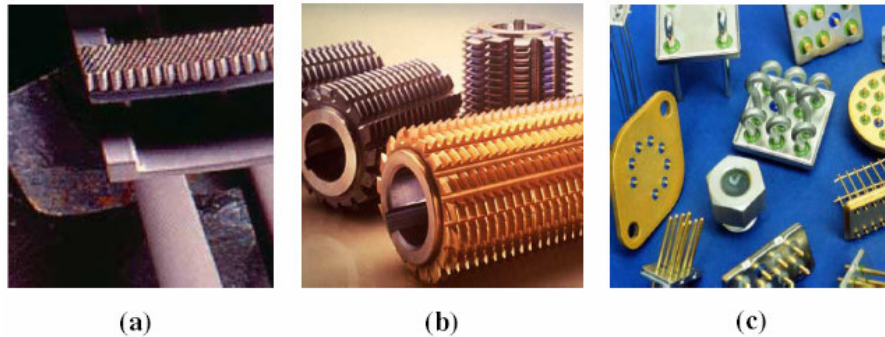


Figure 1.1: Exemples d'applications du brasage (AirProducts, 2001):

(a) - Structure brasée en nid d'abeille pour les applications aéronautiques

(b) - Outils de coupe en carbure brasés au métal

(c) - Assemblage brasé métal-verre utilisé dans l'électronique

Une des applications marquantes des assemblages brasés est la fabrication des moules d'injection des alliages par le procédé de Stratoconception[®] (Barlier, 1992). Ce procédé, qui appartient aux techniques de prototypage rapide, est développé par le CIRTES (Centre Européen de Prototypage Rapide et Outillage Rapide). Dans ce procédé, la pièce en général et le moule en particulier sont fabriqués à partir des couches élémentaires simples appelées "strates". Les strates sont empilées et assemblées par brasage. La Figure 1.2 illustre un moule fabriqué par la Stratoconception[®] qui est abordé dans les travaux de (Pelaingre *et al.*, 2003).

Les critères exigeants fondamentaux, pour l'assemblage brasé utilisé dans les moules d'injection fabriqués par la Stratoconception[®], sont la résistance (mécanique, thermique, anti-corrosion et anti-oxydation), l'étanchéité et l'esthétique. Le type de brasage fort peut satisfaire à ces critères, cependant, le brasage à haute température est le choix plus efficace.

Dans plusieurs cas d'application, l'assemblage brasé doit résister aux sollicitations mécaniques et thermiques en service. A titre d'exemple, pour un moule fabriqué par la Stratoconception[®], d'une part, l'assemblage brasé doit supporter les sollicitations mécaniques (traction, compression, cisaillement, flexion) dues à la pression d'injection, à la pression de fermeture des plateaux de la machine d'injection et aux efforts de démoulage (Nafi, 2005). D'autre part, à cause de l'injection

de la matière chaude et du processus de refroidissement, l'assemblage brasé doit résister aussi aux effets thermiques de conduction. Par conséquent, l'étude du comportement mécanique et thermique de l'assemblage brasé mérite d'être mis en évidence.

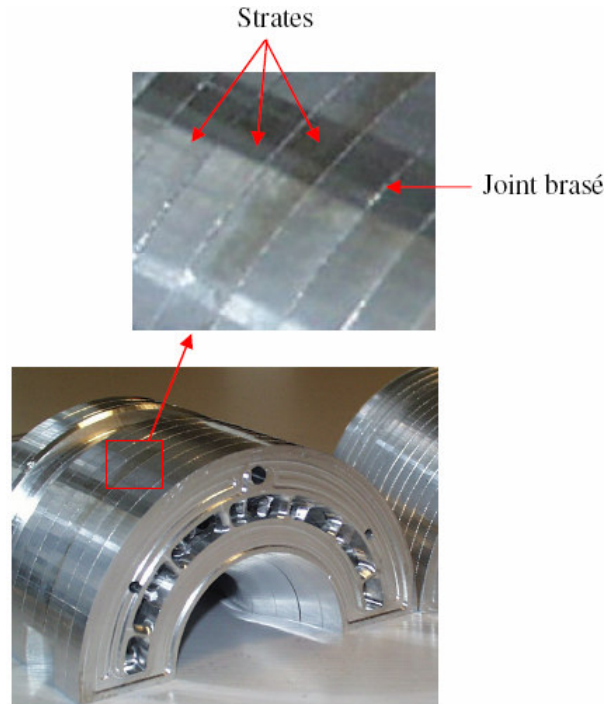


Figure 1.2: Moule fabriqué par la Stratoconception® (Pelaingre *et al.*, 2003)

A la différence d'une structure homogène, le comportement global de l'assemblage en général et de l'assemblage brasé en particulier dépend bien évidemment des matériaux de base, *i.e.* des matériaux à assembler, mais aussi considérablement du joint. Autrement dit, la présence du joint contribue considérablement à la différence entre l'assemblage et une structure homogène. Dans leurs travaux, (Maeder *et al.*) ont révélé trois points principaux de la différence, au niveau des contraintes internes, entre les deux types de structures:

- Les contraintes internes présentant dans l'assemblage brasé sont engendrées soit par une différence de coefficient de dilatation thermique des composants soit par un gradient thermique pendant la solidification de l'alliage d'apport (cf. Figure 1.3a).
- Dans les régions de transition entre les matériaux de base et l'alliage d'apport, le module d'Young change brutalement, ce qui crée un état de contrainte déviatorique par rapport à celui présent dans la structure homogène (cf. Figure 1.3b).

- Un joint très mince, fait d'un matériau mou liant deux substrats des matériaux de base à haute résistance mécanique, est empêché de se déformer plastiquement à cause de la formation de contraintes hydrostatiques. Ceci permet de charger le joint largement au-delà de la limite d'écoulement de l'alliage d'apport (cf. Figure 1.3c).

Cependant, le dernier point ne peut être trouvé que dans le domaine micromécanique pour les joint-films d'épaisseur d'ordre de $0.1\mu m$ (Gerhard *et al.*, 2003). Pour les assemblages brasés, les matériaux de base peuvent influencer les caractéristiques métallurgiques de l'alliage d'apport. Autrement dit, le comportement global de l'assemblage peut changer les propriétés mécaniques initiales de l'alliage d'apport.

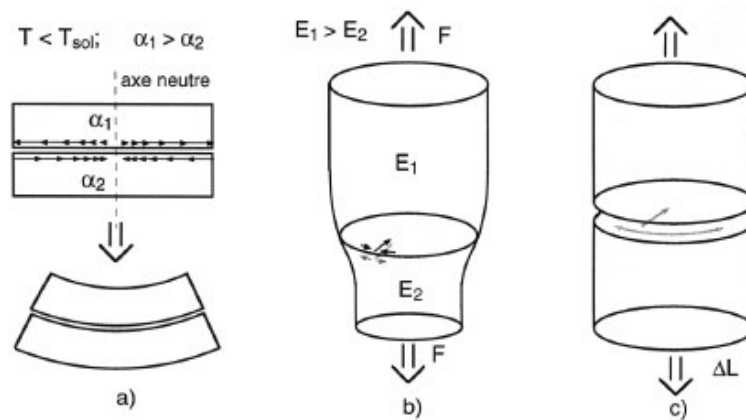


Figure 1.3: Différentes sources de contraintes internes dues à la jonction de bimatériaux

a) Contraintes dues à une dilatation thermique différentes des deux parties

b) Contraintes radiales dues à un changement de propriété élastique abrupte

c) Contraintes radiales liées à une déformation plastique empêchée

(Maeder *et al.*)

En outre, il est communément observé que l'intégrité de l'assemblage dépend en grande partie de la résistance du joint. En effet, pour un assemblage, la rupture se localise majoritairement dans le joint ou aux interfaces entre le joint et les substrats. Cela peut être expliqué par l'existence des défauts (les porosités par exemple) dans le joint. Par conséquent, il est important de bien connaître la sollicitation du joint pour pouvoir estimer le comportement global de l'assemblage, au niveau de la relation contrainte – déformation ainsi que de la rupture.

1.2. Méthodes de modélisation des assemblages

L'influence réciproque entre l'assemblage et le joint soulève la nécessité de modéliser le comportement global de l'assemblage en prenant en compte la présence du joint. En particulier, pour une structure d'empilement des strates qui sont assemblés par plusieurs joints (cf. Figure 1.2), notamment des joints "mou", l'accumulation de déformation des joints est considérable. Dans ce cas là, la prise en compte des joints dans la simulation globale de l'assemblage est indispensable.

Comme une modélisation exacte pour les problèmes des assemblages est évidemment difficile, voire impossible, il faut compter sur les méthodes approximatives. Dans la littérature, nous pouvons trouver et classer les méthodes pour résoudre les problèmes des assemblages en deux catégories principales: numérique et analytique.

Premièrement, la plupart des simulations numériques des assemblages, y compris des assemblages brasés, sont basées sur la méthode des éléments finis (FEM). Fort de ses avantages inévitables, la FEM a la capacité de traiter les problèmes des assemblages à plusieurs niveaux comme décrits ci-dessous.

Dans les travaux de (Wooly *et al.*, 1971), (Adams *et al.*, 1974) et (Zhang *et al.*, 2002), la simulation par FEM du comportement élastique linéaire des assemblages est présentée. Le comportement non-linéaire du type élasto-plastique ou élasto-visco-plastique des assemblages est abordé par (Harris *et al.*, 1984), (Kinloch, 1987) et (Pandey *et al.*, 1999).

(Nowacki *et al.*, 2003) ont considéré la simulation numérique par FEM à l'aide du logiciel ADINA pour modéliser l'assemblage brasé "céramique WC-Co/alliage d'apport du cuivre/acier 17-4 PH". Le calcul est développé pour les deux modèles: 2D en contrainte plane et 3D. En utilisant le code de calcul des éléments finis Zebulon, (Nafi, 2005) a comparé les trois modèles (3D, 2D en contrainte plane et en déformation plane) pour la modélisation de l'assemblage brasé "acier 40CMD8/alliage d'apport CuSi".

La modélisation des assemblages par FEM peut être effectuée, à l'aide des codes de calcul, pour les différents types de sollicitations: traction bout à bout (Zebulon) (Nafi, 2005), cisaillement à simple recouvrement (ANSYS) (Khalili *et al.*, 2008) ou cisaillement à double recouvrement (ABAQUS et LS-DYNA) (Xiao *et al.*, 2004).

Cependant, à cause de la présence du joint, la simulation de l'assemblage par FEM standard n'est pas vraiment efficace. Possédant une extrêmement faible épaisseur (de l'ordre de $100\mu m$ pour le

joint brasé par exemple) et des caractéristiques différentes de celles des matériaux à assembler, le joint est considéré comme une singularité. Afin de modéliser de façon relativement acceptable par FEM standard, il faut raffiner énormément la zone autour du joint. L'utilisation d'un grand nombre d'éléments provoque bien évidemment le coût élevé de la simulation numérique ainsi que la difficulté pour la manipulation du calcul.

Deuxièmement, les calculs analytiques pour les assemblages, notamment pour les assemblages collés, sont abordés par un certain nombre de travaux depuis longtemps.

Etant considéré comme première étude, (Volkersen, 1938) a proposé le modèle de l'assemblage à simple recouvrement en supposant qu'il n'y a qu'une déformation de cisaillement dans le joint. Ensuite, (Goland *et al.*, 1944) ont postulé un modèle basé sur la théorie de poutre élastique. Ce modèle comporte deux poutres qui sont assemblées par un joint dans lequel il existe à la fois les déformations normales et de cisaillement. Ces deux travaux fondamentaux inspirent d'autres à étendre et à généraliser l'étude sur le comportement des assemblages, à savoir par exemple: (Hart-Smith, 1973), (Ojalvo *et al.*, 1978), (Delale *et al.*, 1981), (Ottosen *et al.*, 1988) et (Tsai *et al.*, 1994).

Une autre approche analytique, qui est plus systématique, est d'utiliser la technique du développement asymptotique. Cette approche fournit une dérivation d'un modèle d'assemblage caractérisé par un ou plusieurs petits paramètres. Dans ce modèle, le champ de déplacement (et/ou de contrainte) est développé sous forme d'une série asymptotique en termes de petits paramètres. Les petits paramètres peuvent être les rapports d'épaisseurs ou de modules d'Young du joint et des substrats. Cette approche pour modéliser les assemblages est considérée par (Klarbring, 1991), (Destuynder *et al.*, 1992), (Geymonat *et al.*, 1998), (Klarbring *et al.*, 1998) et (Geymonat *et al.*, 1999).

Dans la même idée de construire un modèle d'assemblage dépendant des petits paramètres caractéristiques, (Abdelmoula *et al.*, 1998) et (Leguillon *et al.*, 1999) ont proposé une approche basée sur la méthode des développements asymptotiques raccordés (Van Dyke, 1975). Dans cette approche, le problème réel du comportement d'un assemblage est ramené à deux problèmes approchés qui sont valables dans les deux échelles: macroscopique (extérieur) et microscopique (intérieur) par rapport à la zone autour du joint.

Pour le problème thermique des assemblages, le nombre des méthodes analytiques utilisées est moindre que celui destiné au problème mécanique. Une méthode peut être trouvée dans la littérature est la méthode des quadripôles qui est proposée par (Degiovanni, 1988). Nous pouvons

citer à ce sujet les travaux de (Lazard, 2006) qui a appliqué la méthode des quadripôles pour modéliser la structure d'un moule stratifié contenant plusieurs joints brasés.

Cependant, comme le calcul numérique par FEM, le calcul analytique des assemblages présente ses propres inconvénients. Les problèmes susceptibles d'être traités analytiquement sont souvent limités au niveau du type de sollicitation et de géométrie. De plus, il faut admettre des hypothèses ou des simplifications pour que le modèle puisse être résolu.

Les inconvénients de la simulation numérique par FEM et de l'approche analytique pour le problème des assemblages prenant en compte le joint nous incitent à rechercher une méthode plus efficace. L'idée de combiner les deux types de calcul numérique et analytique peut être une proposition. De plus, connaissant les inconvénients cités ci-dessus de la FEM, il faut la remplacer par une méthode numérique qui est proprement destinée aux problèmes contenant des singularités. Dans notre étude, nous proposons d'utiliser la méthode des éléments finis étendus (connue sous le terme X-FEM — eXtended Finite Element Method) (Moës *et al.*, 1999) pour remplacer la FEM standard. Etant une des méthodes récemment développées dans le but d'améliorer la FEM, la X-FEM conserve les attraits de la FEM à laquelle est ajoutée des particularités permettant de faire des choses impossibles par ailleurs (Béchet, 2008). Elle permet de relaxer les contraintes imposées au maillage pour la simulation des problèmes contenant des singularités. Par conséquent, nous pouvons nous affranchir du raffinement énorme du maillage pour la zone autour des singularités. L'exactitude de la solution des problèmes singuliers et ses coûts de calcul donnent alors un compromis raisonnable par rapport à celui de la FEM pour les problèmes réguliers.

1.3. Objectifs de l'étude

En tenant compte des remarques précédentes, dans cette étude, nous proposons le couplage de deux méthodes: la méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) et la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) pour la modélisation du comportement des assemblages brasés. Nous considérons les aspects mécaniques et thermiques séparément. Le problème couplé thermomécanique n'a pas été traité dans le cadre de ces travaux.

Ce mémoire d'étude comporte cinq chapitres. A part ce chapitre introductif, les chapitres suivants consistent en ceux-ci:

Le deuxième chapitre présente une étude bibliographique sur les deux méthodes que nous couplons dans la suite, DAR et X-FEM. Dans la première partie du chapitre, l'idée de base ainsi

que le processus de mise en oeuvre de la méthode des DAR sont présentés à travers un exemple d'un système d'équations différentielles. L'apparition d'un petit paramètre provoque la singularité du problème. Dans la deuxième partie du chapitre, l'origine et le principe de la méthode X-FEM sont clarifiés par ses applications mécaniques. A travers la modélisation de deux types de discontinuités, un point essentiel de la X-FEM — la construction de la partie enrichie — est discuté. Au cours de ce chapitre, nous concluons sur la possibilité, non seulement d'utiliser les deux méthodes, mais aussi de les combiner pour modéliser des problèmes comportant des singularités en général et le cas des assemblages brasés en particulier.

Dans le troisième chapitre, les premières idées fondamentales du couplage des deux méthodes DAR et X-FEM sont présentées pour la modélisation unidimensionnelle des assemblages brasés. Nous considérons deux problèmes à titre d'exemple: mécanique (traction simple) et thermique (conduction en régime transitoire). Dans la première partie, à travers le problème mécanique, le principe général des deux méthodes du couplage DAR-X-FEM est proposé. Ces deux méthodes sont mises en oeuvre à l'aide de cinq variantes d'enrichissement. La comparaison au niveau de plusieurs critères nous aide à évaluer et à choisir la meilleure variante. Dans la deuxième partie, le problème thermique transitoire d'un assemblage brasé est traité en utilisant une des cinq variantes proposées.

Le quatrième chapitre porte sur le fonctionnement du couplage DAR-X-FEM pour le cas bidimensionnel de l'assemblage brasé. La variante d'enrichissement la plus appropriée est exploitée. Nous considérons l'application du couplage DAR-X-FEM pour deux types de problèmes: thermique et mécanique, pour lesquels plusieurs cas de conditions aux limites sont examinés. Les résultats obtenus par le couplage DAR-X-FEM sont comparés à ceux des calculs des éléments finis standards.

Le cinquième chapitre présente une étude expérimentale et la tentative de validation du calcul à l'aide du couplage DAR-XFEM par des résultats expérimentaux. Dans la première partie du chapitre, les essais de brasage sont présentés en détail. La deuxième partie a pour but de caractériser les propriétés mécaniques et thermiques des éprouvettes brasées obtenues par la partie précédente. Les résultats issus de cette partie, nous aident d'une part à vérifier la qualité du brasage et d'autre part, sont exploités pour la tentative de validation expérimentale de la partie suivante. Dans la troisième partie, les modules d'Young des composants après l'assemblage sont identifiés et ensuite introduits dans la simulation numérique. La confrontation des résultats numériques et expérimentaux contribue à valider notre démarche de calcul.

La Figure 1.4 ci-dessous présente l'organigramme des chapitres de ce mémoire.

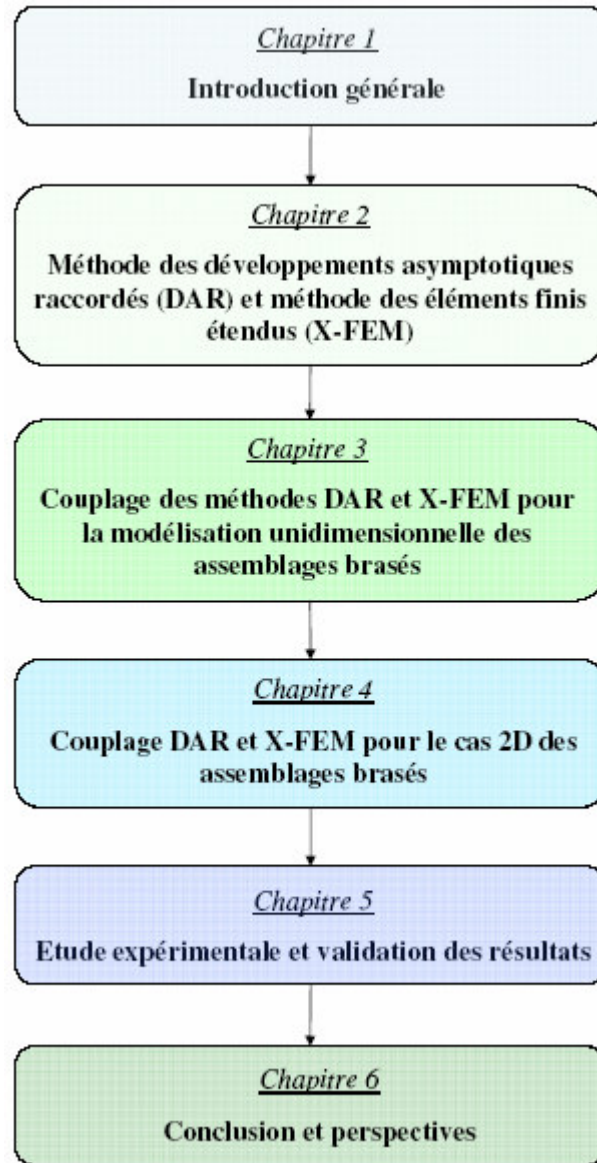


Figure 1.4: Organigramme des chapitres du mémoire

Bibliographie

Abdelmoula, R., Coutris, M. et Marigo, J.-J. (1998). Comportement asymptotique d'une interphase élastique mince. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, **326**, 237-242.

Adams, R. D. et Peppiatt, N. A. (1974). Stress analysis of adhesively bonded lap joints. *Journal of strain analysis for engineering design*, **8**, 134-139.

AirProducts (2001). *Introduction to furnace brazing*. <http://www.airproducts.com>.

Barlier, C. (1992). Le procédé de prototypage rapide par Stratoconception. *Premières Assises Européennes du Prototypage Rapide*, Palaiseau.

Béchet, E. (2008). Une introduction à la méthode des éléments finis étendus (X-FEM).

Degiovanni, A. (1988). Conduction dans un mur multicouche avec sources: extension de la notion de quadripôle. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **31**, 553-557.

Delale, F. et Erdogan, F. (1981). Viscoelastic analysis of adhesively bonded joints. *Journal of Applied Mechanics*, **48**, 331-338.

Destuynder, P., Michavila, F., Santos, A. et Ousset, Y. (1992). Some theoretical aspects in computational analysis of adhesive lap joints. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **35**, 1237-1262.

Gerhard, D., John Balk, T., Hervais, E. et Arzt, E. (2003). *Small-scale plasticity in thin Cu and Al films*. Elsevier Science Ltd, Oxford, UK.

Geymonat, G., Krasucki, F. et Lenci, S. (1999). Mathematical analysis of a bonded joint with a soft thin adhesive. *Mathematics and Mechanics of Solids*, **4**, 201-225.

Geymonat, G., Krasucki, F., Marini, D. et Vidrascu, M. (1998). A domain decomposition method for a bonded structure. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **8**, 1387-1402.

Goland, M. et Reissner, E. (1944). The stresses in cemented joints. *Journal of Applied Mechanics*, **11**, 17-27.

Harris, J. A. et Adams, R. D. (1984). Strength prediction of bonded single lap joints by nonlinear finite element methods. *International journal of adhesion and adhesives*, **4**, 65-78.

Hart-Smith, L. J. (1973). *Adhesive-bonded double-lap joints*. Langley Research Centre.

- Khalili, S. M. R., Khalili, S., Pirouzhshemi, M. R., Shokuhfar, A. et Mittal, R. K. (2008). Numerical study of lap joints with composite adhesives and composite adherends subjected to in-plane and transverse loads. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, **28**, 411-418.
- Kinloch, A. J. (1987). *Adhesion and Adhesives*. Chapman and Hall Ltd, London.
- Klarbring, A. (1991). Derivation of a model of adhesively bonded joints by the asymptotic expansion method. *International Journal of Engineering Science*, **29**, 493-512.
- Klarbring, A. et Movchan, A. B. (1998). Asymptotic modelling of adhesive joints. *Mechanics of Materials*, **28**, 137-145.
- Lazard, M. (2006). Transient thermal behavior of multilayer media: modeling and application to stratified moulds. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, **79**, 758-767.
- Leguillon, D. et Abdelmoula, R. (1999). Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint. *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 2651-2672.
- Maeder, T., Nguyen, Q. T. et Weber, L. *Techniques d'assemblage pour les métaux*. Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne.
- Moës, N., Dolbow, J. et Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 131-150.
- Nafi, A. (2005). *Etude expérimentale et numérique du comportement mécanique de moules d'injection de plastique obtenus par le procédé de stratoconception*. Université Toulouse III, Albi, France.
- Nowacki, J. et Kawiak, M. (2003). Tensions and deformations of WC-Co cermets and 17-4 PH steel vacuum brazed joints. *Journal of materials processing technology*, **143-144**, 294-299.
- Ojalvo, I. U. et Eidinoff, H. L. (1978). Bond thickness effects upon stresses in single-lap adhesive joints. *AIAA Journal*, **16**, 204-211.
- Ottosen, N. S. et Olsson, K.-G. (1988). Hardening/softening plastic analysis of an adhesive joint. *Journal of Engineering Mechanics*, **114**, 97-116.
- Pandey, P. C., Shankaragouda, H. et Arbind, K. S. (1999). Nonlinear analysis of adhesively bonded lap joints considering viscoplasticity in adhesives. *Computers and Structures*, **70**, 387-413.
- Pelaingre, C., Velnom, L., Barlier, C. et Levaillant, C. (2003). A cooling channels innovating design method for rapid tooling in thermoplastic injection molding. *1st conference on advanced research in virtual and rapid prototyping proceedings*, Leiria, Portugal.
- Rabinkin, A. (2004). Brazing with (NiCoCr)-B-Si amorphous brazing filler metals: alloys, processing, joint structure, properties, applications. *Science and Technology of Welding & Joining*, **9**, 181-199.

Tsai, M. Y. et Morton, J. (1994). An evaluation of analytical and numerical solutions to the single-lap joint. *International Journal of Solids and Structures*, **31**, 2537-2563.

Van Dyke, M. (1975). *Perturbation methods in fluid mechanics*. The Parabolic Press, Stanford, California.

Volkersen, O. (1938). Die Niekraftverteilung in Zugbeanspruchten mit Konstanten Laschenquerschnitten. *Luftfahrtforschung*, **15**, 41-47.

Wooly, C. R. et Carver, D. R. (1971). Stress concentration factors for bonded lap joint. *Journal of Aircraft*, **8**, 20-817.

Xiao, X., Foss, P. H. et Schroede, J. A. (2004). Stiffness prediction of the double lap shear joint. Part 2: Finite element modeling. *International Journal of Adhesion & Adhesives*, **24**, 239-246.

Zhang, J. X., Chandel, R. S., Chen, Y. Z. et Seow, H. P. (2002). Effect of residual stress on the strength of an alumina–steel joint by partial transient liquid phase (PTLP) brazing. *Journal of Materials Processing Technology*, **122**, 220-225.

Chapitre 2

Méthode des développements asymptotiques
raccordés (DAR) et méthode des éléments finis
étendus (X-FEM)

Chapitre 2 Méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) et méthode des éléments finis étendus (X-FEM).....	37
2.1. Méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR)	37
2.1.1. Problématique	37
2.1.2. Développement extérieur.....	40
2.1.3. Développement intérieur	42
2.1.4. Règle de raccordement	45
2.1.5. Applications mécaniques de la méthode des DAR	47
2.2. Méthode des éléments finis étendus (X-FEM).....	48
2.2.1. Généralités	48
2.2.2. Approximation de base.....	50
2.2.2.1. Méthode de partition de l'unité PUFEM	50
2.2.2.2. Approximation de la X-FEM	50
2.2.3. X-FEM dans la modélisation de fortes discontinuités.....	52
2.2.4. X-FEM dans la modélisation de faibles discontinuités	55
2.2.5. Programmation de la X-FEM.....	58
2.3. Conclusion.....	59
Bibliographie.....	62

Chapitre 2

Méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) et méthode des éléments finis étendus (X-FEM)

L'objet de ce chapitre est l'étude bibliographique des fondements de deux méthodes: la méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) et la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). Un des principaux points communs de ces deux méthodes est qu'elles sont destinées à résoudre des problèmes contenant des singularités. Le principe et le processus de mise en oeuvre de la méthode des DAR sont présentés au travers d'un exemple plutôt mathématique. Ses applications pour les problèmes mécaniques sont citées de façon générale en laissant le détail des calculs pour le chapitre suivant. En revanche, l'approximation de la X-FEM est clarifiée par ses applications mécaniques. Au cours de ce chapitre, nous concluons sur la possibilité, non seulement d'utiliser les deux méthodes, mais aussi de les combiner pour modéliser des problèmes comportant des singularités en général et le cas des assemblages brasés en particulier.

2.1. Méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR)

2.1.1. Problématique

Plusieurs modèles mathématiques qui présentent des phénomènes physiques ou mécaniques conduisent parfois à des équations contenant un (ou plusieurs) petits paramètres ε . Pour ces types de problèmes, il est souvent impossible de donner la forme explicite de la solution. De plus, la mise en oeuvre des solutions numériques est quelquefois difficile ou même impraticable à cause de la présence du petit paramètre. Dans de telles situations, une suggestion est d'élaborer des modèles plus simples, soit en annulant le petit paramètre, soit en limitant son influence dans un domaine restreint. Ces deux simplifications peuvent être combinées.

Lorsque l'on annule le petit paramètre, il est possible que la solution du problème initial ne tende pas *uniformément* vers la solution du problème réduit. On se trouve alors dans le cas d'une perturbation singulière.

Afin de mieux comprendre ce phénomène, on considère l'exemple d'une équation différentielle dont le petit paramètre intervient dans le terme de dérivée la plus élevée:

$$\begin{cases} \varepsilon \frac{d^2 f}{dx^2} + \frac{df}{dx} = a \\ f(0) = 0 \\ f(1) = 1 \\ a \neq 1 \end{cases} \quad (2.1)$$

La solution exacte de (2.1) — connue dans ce cas particulier — est proposée par (Friedrichs, 1942):

$$f(x, \varepsilon) = (1-a) \frac{1 - \exp(-\frac{x}{\varepsilon})}{1 - \exp(-\frac{1}{\varepsilon})} + ax \quad (2.2)$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, la première équation de (2.1) est réduite à une équation différentielle du premier ordre. Les deux conditions aux limites ne peuvent pas être satisfaites en même temps avec la condition $a \neq 1$. Il existe *une surabondance* de conditions aux limites par rapport à l'équation réduite dont la solution approchée est donnée par:

$$f(x, \varepsilon) \approx ax + (1-a) \quad (2.3)$$

Nous constatons que la condition pour $x=0$ doit être négligée ou "*perdue*" pour assurer la validité de la solution (2.3). Ce phénomène est appelé *la perturbation singulière*.

De nombreuses méthodes ont été développées pour tenter de résoudre les problèmes de perturbation singulière, à savoir par exemple: la méthode des développements asymptotiques raccordés, la méthode des approximations successives complémentaires (De Jaeger *et al.*, 1996), la méthode des échelles multiples (Mahony, 1962), la méthode de Poincaré-Lighthill, la méthode du groupe de renormalisation (Chen *et al.*, 1996). Les lecteurs peuvent trouver une synthèse de comparaison entre ces méthodes pour résoudre le problème de perturbation singulière d'un oscillateur linéaire dans (Cousteix *et al.*, 2006).

Parmi celles-ci, *la méthode des développements asymptotiques raccordés* (DAR) proposée par (Van Dyke, 1975) est la plus connue et la plus efficace. Originellement appliquée à la mécanique

des fluides pour les couches limites dans les écoulements, la méthode des DAR peut être aussi utilisée pour les autres domaines de la mécanique et de la physique.

En mécanique des solides, un problème de perturbation singulière est souvent posé sur un domaine Ω^ε qui contient un défaut ou un détail intérieur (inclusion, fissure ou joint brasé) (Figure 2.1). Nous utilisons le terme "*singularité*" pour décrire au sens général ces types de particularités. La singularité est caractérisée par un petit paramètre intrinsèque ε qui peut-être le rapport entre la dimension e de la singularité et la longueur L de tout domaine ($\varepsilon \ll 1$). Il existe une zone autour de la singularité où la solution du problème est perturbée à cause de la disparition d'une ou des conditions aux limites. Un certain nombre d'applications de la méthode des DAR pour la mécanique des solides sont abordées plus loin dans la section 2.1.5.

Dans l'exemple de l'équation différentielle (2.1), la zone perturbée se trouve autour du point $x = 0$ où $x = O(\varepsilon)$. Nous l'appelons *la couche limite*.

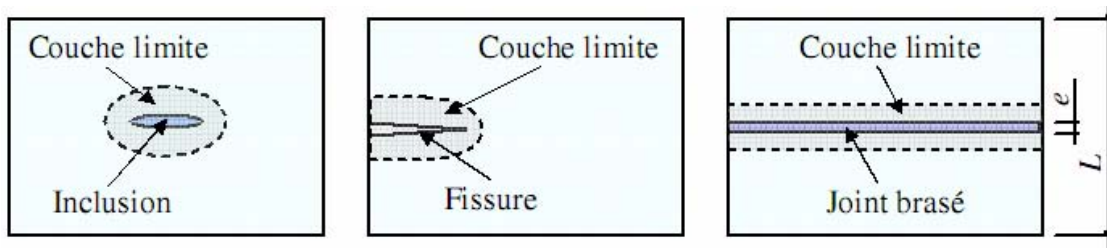


Figure 2.1: Différents cas de singularité

La méthode des DAR nous permet de trouver la solution approchée du problème sous forme des développements asymptotiques du paramètre ε à deux échelles: *extérieur* (ou *macroscopique*) et *intérieur* (ou *microscopique*) de la couche limite.

Avant de présenter en détail les deux développements asymptotiques raccordés du problème de perturbation singulière, nous rappelons en quelques lignes la notion *du développement asymptotique*.

On appelle développement asymptotique d'une fonction $f(\varepsilon)$, une expression de la forme:

$$F_N(\varepsilon) = \sum_{n=0}^N a^n v^n(\varepsilon) \quad (2.4)$$

Dans la formule (2.4), les termes a^n sont déterminés par les limites suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} a^0 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon)}{v^0(\varepsilon)} \\ a^k = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{f(\varepsilon) - \sum_{n=0}^{k-1} a^n v^n(\varepsilon)}{v^k(\varepsilon)} \end{array} \right. \quad (2.5)$$

$F_N(\varepsilon)$ est une représentation approchée de $f(\varepsilon)$ avec une erreur commise de $o(v^n(\varepsilon))$. En général, il n'est pas nécessaire de calculer beaucoup de termes. Par contre, à nombre de termes fixés, le développement asymptotique s'approche d'autant plus de la solution que ε est *petit*.

2.1.2. Développement extérieur

Le développement extérieur est valable dans le domaine *extérieur* de la couche limite ou *loin* de singularité.

Si nous considérons un domaine perturbé réel Ω^ε qui contient une singularité, le problème extérieur est posé sur un domaine extérieur et *non perturbé* Ω^{ext} sans singularité et évidemment sans couche limite. Le domaine Ω^{ext} peut être considéré comme la limite du domaine Ω^ε quand ε tend vers 0.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\Omega^\varepsilon) = \Omega^{ext} \quad (2.6)$$

Par exemple, dans le problème de l'assemblage brasé (Figure 2.2), le domaine non perturbé $\Omega^{ext}(\Omega^1 \cup \Omega^3)$ est obtenu à partir du domaine $\Omega^\varepsilon(\Omega^{1\varepsilon} \cup \Omega^{2\varepsilon} \cup \Omega^{3\varepsilon})$ en imaginant que le joint brasé ($\Omega^{2\varepsilon}$) est "écrasé" en une interface parfaite (Γ^{13}).

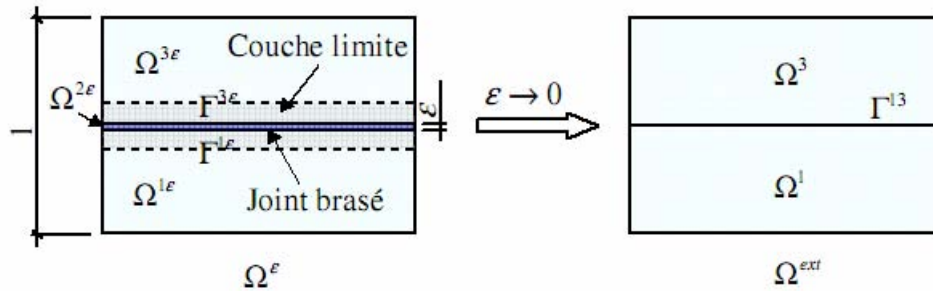


Figure 2.2: Domaine perturbé Ω^ε et domaine non perturbé Ω^{ext}

Le développement asymptotique extérieur d'une fonction $f(x, \varepsilon)$ représentant f dans le domaine extérieur est supposé de la forme:

$$f(x, \varepsilon) = f^0(x) + v^1(\varepsilon)f^1(x) + \dots \quad \text{avec } \varepsilon = e/L \text{ et } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (v^1(\varepsilon)) = 0 \quad (2.7)$$

Dans le développement extérieur (2.7), nous distinguons deux parties différentes: $f^0(x)$ est la solution du problème non perturbé — *i.e.* le problème posé sur le domaine sans singularité Ω^{ext} — et $(v^1(\varepsilon)f^1(x) + \dots)$ est la *correction* tenant compte de la singularité ou de la perturbation. Le terme $f^1(x)$ est aussi calculé sur le domaine Ω^{ext} .

Revenons à l'exemple (2.1), en introduisant le développement extérieur (2.7) dans cette équation, nous obtenons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \frac{d^2 f^0}{dx^2} + \frac{df^0}{dx} + \varepsilon v^1(\varepsilon) \frac{d^2 f^1}{dx^2} + v^1(\varepsilon) \frac{df^1}{dx} + \dots = a \\ f^0(0) + v^1(\varepsilon)f^1(0) = 0 \\ f^0(1) + v^1(\varepsilon)f^1(1) = 1 \\ a \neq 1 \end{array} \right. \quad (2.8)$$

En regroupant les termes de même puissance de ε , nous dégagons le problème d'ordre dominant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{df^0}{dx} = a \\ f^0(1) = 1 \\ a \neq 1 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

Si nous supposons que la singularité se trouve au point $x = 0$ — *i.e.* la couche limite entoure ce point — la condition aux limites $f^0(0) = 0$ n'a aucune raison d'être vérifiée par le problème extérieur. La solution extérieure en première approximation consiste en:

$$f(x, \varepsilon) = f^0(x) = ax + (1 - a) \quad (2.10)$$

Sur la Figure 2.3, nous comparons la solution extérieure (2.10) avec la solution exacte (2.2) à différentes valeurs de ε . Nous constatons bien les caractéristiques de la solution extérieure et de la couche limite:

- Loin de la singularité $x = 0$ ou à l'extérieur de la couche limite, la solution extérieure s'approche de la solution exacte. Dans la couche limite ou proche de la singularité, la solution extérieure diverge complètement de la solution exacte.
- Plus ε est petit, plus la couche limite est étroite et plus les solutions extérieure et exacte sont proches.

Le domaine de validité du développement extérieur est clairement indiqué. Nous ne pouvons pas appliquer le développement extérieur pour l'intérieur de la couche limite. Il est indispensable de proposer une autre type de développement asymptotique dans la couche limite: le développement asymptotique intérieur.

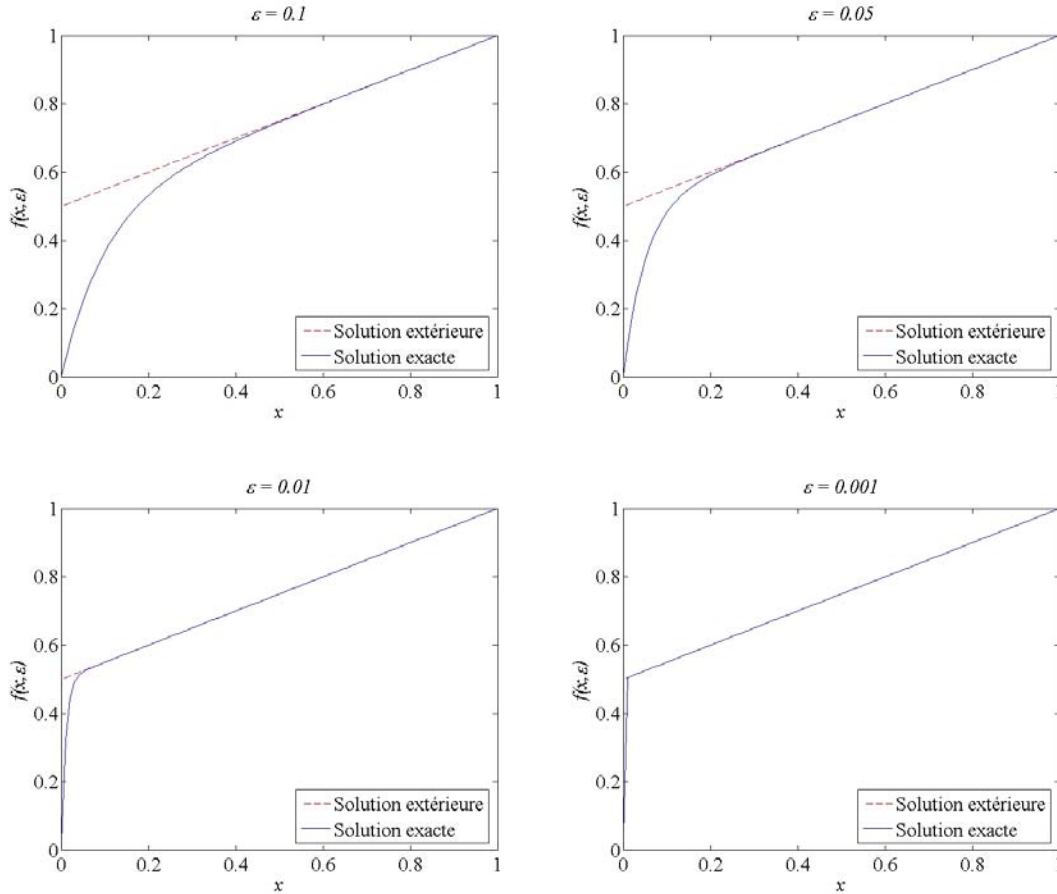


Figure 2.3: Comparaison entre la solution extérieure et la solution exacte pour différentes valeurs de ε

2.1.3. Développement intérieur

Contrairement au développement extérieur, le développement intérieur est valable dans la couche limite ou proche de la singularité.

Avant de poser le problème intérieur, nous définissons la variable intérieure y . La condition aux limites n'est pas vérifiée par la solution extérieure au niveau de la singularité, il semble naturel d'agrandir le voisinage de la singularité pour mieux étudier le problème.

La variable intérieure y est obtenue à partir de la variable extérieure x en appliquant un changement de l'échelle macroscopique à l'échelle microscopique:

$$y = \frac{x}{\delta(\varepsilon)} \quad \text{où } \delta(\varepsilon) \ll 1 \quad (2.11)$$

Si x désigne la variable de coordonnée bidimensionnelle ou tridimensionnelle — *i.e.* $x = (x_1, x_2) \in \mathfrak{R}^2$ ou $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathfrak{R}^3$ — nous devons répondre à deux questions essentielles sur le fait de changer ou d'étirer la variable:

- Quelles composantes de x doivent être étirées?
- Comment peuvent-elles être étirées?

Suivant (Van Dyke, 1975), la réponse pour ces deux questions dépend de la nature de la singularité du problème. Cette nature se caractérise par la position et la "forme" de la singularité. Si la couche limite est au voisinage d'un point — pointe de la fissure en 2D par exemple — tous les composantes de x doivent être changées. Pour le cas où la singularité se trouve le long d'une ligne — ligne brasée par exemple — seule la composante normale est étirée. Le degré de la fonction $\delta(\varepsilon)$ — *i.e.* la façon dont les variables sont changées — peut être déterminé en se basant sur les caractéristiques physiques du problème ou sur *le principe de moindre dégénérescence*.

Considérons le cas le plus courant où $\delta(\varepsilon) = \varepsilon$, le changement (2.11) nous donne la variable intérieure:

$$y = \frac{x}{\varepsilon} = \frac{x.L}{e} \quad (2.12)$$

Nous définissons le domaine intérieur Ω^{int} à partir du domaine réel Ω^ε à l'aide du changement de variable (2.12). Le domaine Ω^{int} est *infini* ou *semi-infini* dans lequel la singularité possède une dimension de l'ordre d'unité (Figure 2.4).

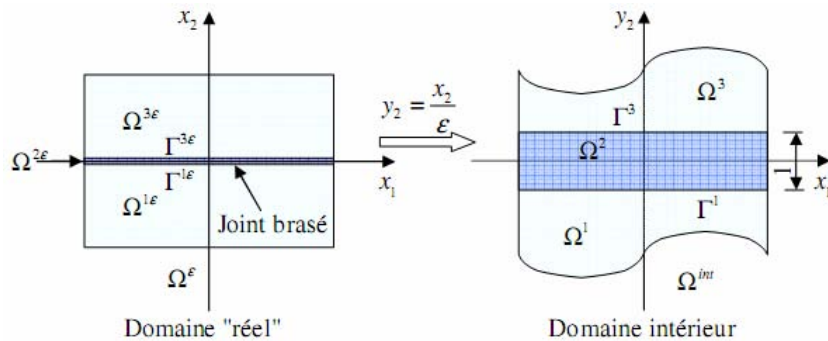


Figure 2.4: Domaine intérieur Ω^{int} défini à l'aide du changement de variable

Le développement asymptotique intérieur de la nouvelle fonction solution du problème dilaté $\tilde{f}(y, \varepsilon)$ défini sur le domaine intérieur Ω^{int} peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{f}(y, \varepsilon) = \eta^0(\varepsilon) \tilde{f}^0(y) + \eta^1(\varepsilon) \tilde{f}^1(y) + \dots \quad \text{avec} \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\eta^1(\varepsilon)}{\eta^0(\varepsilon)} = 0 \quad (2.13)$$

Afin de mieux comprendre le fonctionnement du développement intérieur, nous reprenons l'équation différentielle (2.1). L'équation du problème intérieur s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \frac{d^2 \tilde{f}}{dy^2} + \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{d\tilde{f}}{dy} = a \\ \tilde{f}(0) = 0 \\ a \neq 1 \end{array} \right. \quad (2.14)$$

Rappelons que la condition aux limites $f(x) = 1$ au point $x = 1$ qui est à l'extérieur de la couche limite n'a aucune raison d'être satisfaite par le développement intérieur. De nouveau, une condition aux limites du problème initial est "*perdue*".

En introduisant (2.13) dans (2.14), nous obtenons l'équation du terme à l'ordre dominant:

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta^0 \frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} \frac{d^2 \tilde{f}^0}{dy^2} + \eta^0 \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \frac{d\tilde{f}^0}{dy} = a \\ \tilde{f}^0(0) = 0 \\ a \neq 1 \end{array} \right. \quad (2.15)$$

Comme nous l'avons abordé précédemment, le choix de $\delta(\varepsilon)$ est basé sur le principe de moindre dégénérescence — *i.e.* $\delta(\varepsilon)$ est choisi pourvu que le maximum de termes significatifs dans l'équation soient conservés. Autrement dit, une condition suffisante est:

$$\frac{\varepsilon}{\delta^2(\varepsilon)} = \frac{1}{\delta(\varepsilon)} \quad (2.16)$$

ce qui revient à poser:

$$\delta(\varepsilon) = \varepsilon \quad (2.17)$$

En tenant compte de (2.17), l'équation (2.15) devient:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \tilde{f}^0}{dy^2} + \frac{d\tilde{f}^0}{dy} = 0 \\ \tilde{f}^0(0) = 0 \end{array} \right. \quad (2.18)$$

ce qui donne:

$$\tilde{f}^0 = A(1 - \exp(-y)) \quad (2.19)$$

On constate que la constante A ne peut pas être déterminée explicitement. En général, les termes du développement intérieur (2.13) ne peuvent pas être identifiés par le seul problème intérieur. Il faut ajouter les conditions qui relient les deux développements.

2.1.4. Règle de raccordement

Nous rappelons que le développement extérieur ne vérifie pas les conditions aux limites imposées dans la couche limite; en revanche, le développement intérieur ne satisfait pas les conditions loin de la singularité. L'insuffisance de conditions aux limites pour les deux développements est compensée par *le raccordement* entre eux.

La première idée pour le raccordement proposée par (Kaplan, 1957) consiste à déterminer une zone intermédiaire où les deux développements sont simultanément valables. Plus précisément, il faut trouver une zone de recouvrement où le comportement du développement extérieur pour x petit s'identifie à celui du développement intérieur pour y grand. Les deux développements extérieur et intérieur sont liés au travers d'un développement intermédiaire qui est présenté par une variable intermédiaire.

(Van Dyke, 1975) a souligné le désavantage de ce raccordement et proposé une autre technique de raccordement. La règle de raccordement de Van Dyke est énoncée en deux façons:

"La limite intérieure de la limite extérieure est égale à la limite extérieure de la limite intérieure"

ou

"La représentation intérieure de la représentation extérieure est égale à la représentation extérieure de la représentation intérieure".

La règle de raccordement peut être présentée par la formulation mathématique suivante:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x, \varepsilon) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \tilde{f}(y, \varepsilon) \quad (2.20)$$

La règle (2.20) est appliquée terme à terme aux deux développements (2.7) et (2.13). Le processus de raccordement est présenté par (Van Dyke, 1975) selon la Figure 2.5. Le premier terme du développement extérieur domine le premier terme du développement intérieur qui influence à son tour le deuxième terme extérieur ...

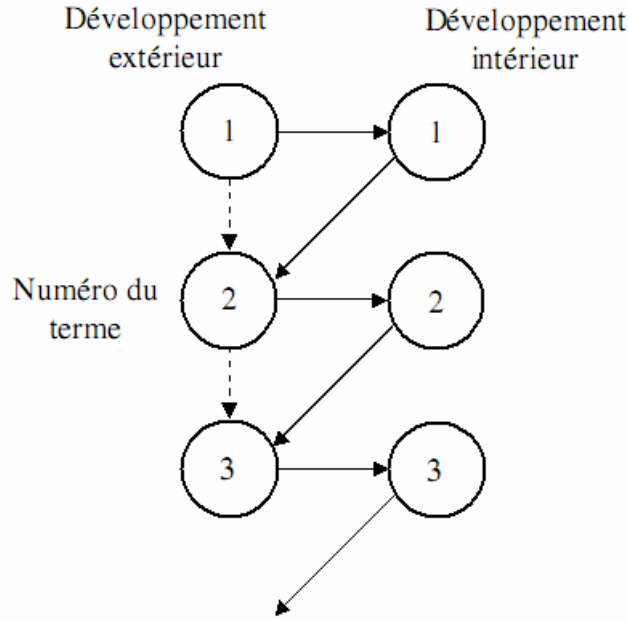


Figure 2.5: Processus de raccordement pour les développements extérieur et intérieur

Revenons à l'exemple (2.1). Nous essayons d'appliquer les techniques de raccordement proposées par (Kaplun, 1957) et par (Van Dyke, 1975) pour déterminer la solution intérieure.

Nous définissons une variable intermédiaire:

$$\hat{x} = \frac{x}{\varepsilon^\beta} \quad \text{avec } 0 < \beta < 1 \quad (2.21)$$

La solution extérieure (2.10) et la solution intérieure (2.19) sont réécrites en variable intermédiaire \hat{x} :

$$\begin{aligned} f^0(\hat{x}) &= (1-a) + a\varepsilon^\beta \hat{x} \\ \tilde{f}^0(\hat{x}) &= A - A \exp\left(-\frac{\hat{x}}{\varepsilon^{1-\beta}}\right) \end{aligned} \quad (2.22)$$

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$ pour \hat{x} fixé, nous obtenons:

$$A = 1 - a \quad (2.23)$$

Si nous appliquons la règle de Van Dyke, nous obtenons la même valeur de A , mais plus vite et plus explicitement:

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} (\tilde{f}^0(y)) = \lim_{x \rightarrow 0} (f^0(x)) \Leftrightarrow A = 1 - a \quad (2.24)$$

Le développement intérieur en première approximation (2.19) a la forme complète:

$$\tilde{f}^0 = (1-a)(1 - \exp(-y)) \quad (2.25)$$

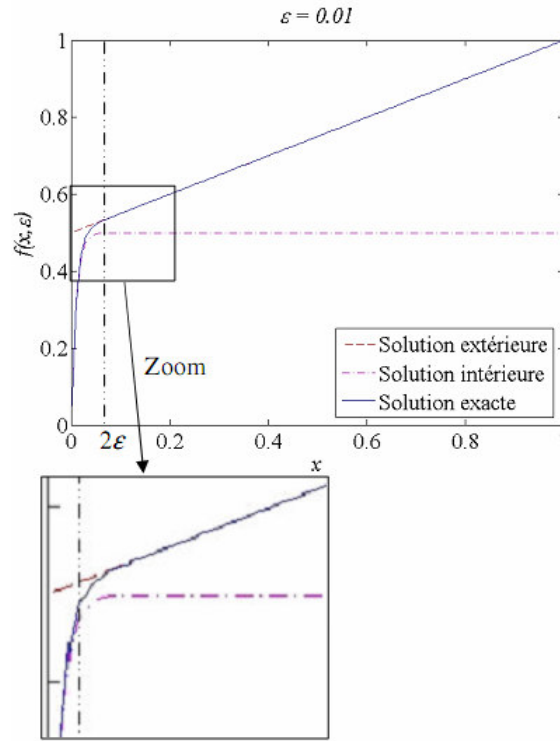


Figure 2.6: Solutions de l'équation différentielle (2.1)

La Figure 2.6 présente la solution exacte (2.2) ainsi que les solutions extérieure (2.10) et intérieure (2.25) de l'équation différentielle (2.1). Nous constatons que loin de la singularité $x = 0$, la solution extérieure coïncide avec la solution exacte tandis que dans la couche limite (de l'épaisseur de l'ordre de 2ε), la solution intérieure approche au mieux la solution exacte.

2.1.5. Applications mécaniques de la méthode des DAR

Issue de son application originale dans la mécanique des fluides, la méthode des DAR est ainsi largement utilisée pour les problèmes de la mécanique des solides. Dans le cadre de notre étude sur les assemblages brasés, nous nous intéressons à la possibilité que la méthode des DAR donne une modélisation approchée fiable pour les structures contenant *des défauts* ou *des hétérogénéités*. (Abdelmoula *et al.*, 1997) ont proposé d'utiliser la méthode des DAR pour modéliser deux structures hétérogènes linéaires élastiques bidimensionnelles: l'un est l'assemblage collé et l'autre est un matériau composite. Dans la même idée d'utiliser la méthode des DAR, mais plus concentrée sur le modèle de l'assemblage collé, (Abdelmoula *et al.*, 1998) ont montré que à l'ordre 1, la colle peut être assimilée à *une ligne de discontinuité* sur le déplacement et sur la contrainte. Dans ces deux travaux, l'élasticité de la colle est supposée *comparable*, *i.e.* du même

ordre de grandeur, à celle des substrats. Plus étendue, l'application de la méthode des DAR pour modéliser des assemblages collés dont la colle possède une rigidité *équivalente* ou *extrêmement faible* par rapport à celle des substrats est présentée dans (Leguillon *et al.*, 1999). Nous nous sommes inspirés de ces travaux afin d'appliquer la méthode des DAR pour modéliser des assemblages brasés dont le comportement est *relativement similaire* à celui des assemblages collés, comme il est présenté dans le chapitre 3.

2.2. Méthode des éléments finis étendus (X-FEM)

2.2.1. Généralités

La méthode des éléments finis (FEM) est devenue une des méthodes numériques la plus importante et efficace pour les ingénieurs et la communauté scientifique. Cependant, malgré son efficacité pour modéliser les problèmes "*suffisamment réguliers*", la FEM n'est pas bien adaptée aux problèmes dont les solutions sont *discontinues* ou *singulières* (Rabczuk *et al.*, 2007), (Nguyen, 2005) et (Fries, 2008). Pour ces types de problèmes, la FEM exige un raffinement souvent énorme du maillage ou la conformité du maillage aux singularités pour obtenir des résultats précis. Afin de pallier à ces déficiences de la FEM, *la méthode des éléments finis étendus* (X-FEM) a été développée.

Une des bases mathématiques de la X-FEM est *la méthode de partition de l'unité* (PUFEM) proposée par (Melenk *et al.*, 1996). L'idée principale de cette méthode est d'incorporer des informations connues *a priori* sur le comportement local de la solution dans l'approximation des éléments finis. Plus précisément, *les fonctions enrichies globales* qui contiennent des informations sur la solution du problème sont multipliées par *les fonctions de forme nodales*.

(Belytschko *et al.*, 1999) ont adapté la PUFEM à la modélisation de la propagation des fissures. Les fonctions enrichies discontinues sont incorporées dans l'espace standard des éléments finis dans le but de tenir compte de la présence des fissures. Leur étude a révélé un certain nombre de déficiences car ils n'ont utilisé que les fonctions asymptotiques autour de la pointe des fissures.

(Moës *et al.*, 1999) ont étendu et amélioré la méthode proposée par (Belytschko *et al.*, 1999). Ces travaux peuvent être considérés comme la première apparition de la nouvelle méthode intitulée X-FEM (abréviation en anglais du nom "*eXtended Finite Element Method*"). Cette méthode autorise la représentation de la fissure indépendamment du maillage. La discontinuité du déplacement provoquée par la fissure est présentée à l'aide de deux champs enrichis: l'un est

discontinu à travers la ligne de la fissure et l'autre est valable autour de la pointe de la fissure. Ces deux champs enrichis sont utilisés au niveau *local* — *i.e.* dans la zone autour de la fissure. Nous pouvons alors remarquer que la X-FEM apparaît alors comme un cas particulier de la PUFEM.

La X-FEM a été progressivement améliorée et perfectionnée notamment dans le domaine de la mécanique de la rupture. (Dolbow *et al.*, 2000b) et (Sukumar *et al.*, 2000b) ont développé la X-FEM pour modéliser le problème tridimensionnel des fissures. Le couplage entre la X-FEM et la *méthode des fonctions de niveau* qui présente la position des fissures a été proposé par (Belytschko *et al.*, 2001) ou (Moës *et al.*, 2002).

La X-FEM a été initialement appliquée pour modéliser la fissure — *i.e.* la discontinuité sur le champ du déplacement ou la *forte discontinuité*. Suite à cette application originale, la X-FEM a été introduite pour résoudre plusieurs problèmes de *faibles discontinuités* — *i.e.* les discontinuités sur le gradient du champ ou les problèmes de classe C^0 mais pas C^1 (cf. Figure 2.7).

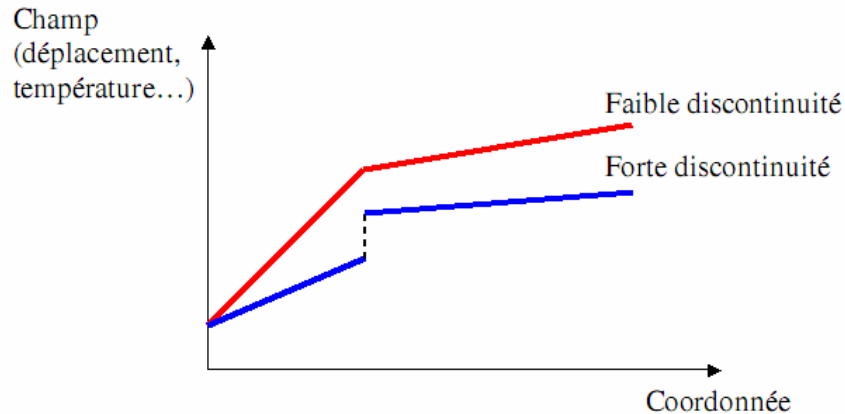


Figure 2.7: Deux catégories de discontinuité

Le principe essentiel de la X-FEM qui consiste à enrichir l'approximation standard des éléments finis par des fonctions appropriées est conservé. En revanche, la nature des fonctions enrichies utilisées pour la faible discontinuité est différente de celle destinée à la forte discontinuité. La fonction de niveau a été utilisée à la fois pour localiser la position des inclusions et pour construire des fonctions enrichies de la X-FEM pour modéliser des interfaces bimatériaux (Sukumar *et al.*, 2000a). Une autre idée proposée par (Smith *et al.*, 2007) est de remplacer les fonctions enrichies construites à partir de la fonction de niveau par une fonction exponentielle qui modélise plus exactement l'interface matérielle.

Finalement, on l'aura compris, la X-FEM est d'autant plus performante que le choix des fonctions enrichies est pertinent. Or la détermination de ces fonctions ne fait pas l'objet d'une méthode universelle. Il relève plutôt d'un processus de tâtonnement.

2.2.2. Approximation de base

2.2.2.1. Méthode de partition de l'unité PUFEM

Soit l'ensemble de n fonctions $f_i(x)$ qui forme une partition de l'unité dans un domaine Ω^{pu} . Alors nous avons la condition suivante qui est satisfaite:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) = 1 \quad \text{dans } \Omega^{pu} \quad (2.26)$$

Il est facile de montrer qu'alors pour une fonction $\psi(x)$ quelconque:

$$\sum_{i=1}^n f_i(x) \psi(x) = \psi(x) \quad (2.27)$$

Cela revient à définir la fonction $\psi(x)$ sous la forme de partition de l'unité dans Ω^{pu} .

Dans la FEM, les fonctions de forme représentent une partition de l'unité. En notant $N_i(x)$ la fonction de forme du nœud i , la partition de l'unité s'exprime dans un élément:

$$\sum_{i=1}^n N_i(x) = 1 \quad (2.28)$$

Une fonction $\psi(x)$ arbitraire peut être reproduite par l'ensemble des fonctions de formes $N_i(x)$

$$\psi(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \psi(x) \quad (2.29)$$

La propriété (2.29) joue un rôle essentiel dans la construction des fonctions enrichies par la PUFEM présentée dans (Melenk *et al.*, 1996). Elle permet en effet d'interpréter une fonction $\psi(x)$ quelconque (pas seulement linéaire ou quadratique) dans le formalisme de la FEM. Le premier et pertinent exemple est celui de $\psi(x)$ représentant le complexe champ de déplacement autour de la pointe d'une fissure.

2.2.2.2. Approximation de la X-FEM

Issue de la PUFEM, l'approximation — pour le domaine contenant une fissure — proposée par (Belytschko *et al.*, 1999) est considérée comme une base de la X-FEM. L'enrichissement est

représenté à l'aide de la multiplication des fonctions enrichies par les fonctions de forme nodales.

Le champ enrichi du déplacement est donné par:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^n N_i(x) \left(u_i + \sum_{k=1}^m F_k(r, \theta) a_{ki} \right) \quad (2.30)$$

où (r, θ) est le système de coordonnées polaires dont l'origine se trouve à la pointe de la fissure, u_i et a_{ik} sont les degrés de liberté, $F_k(r, \theta)$ désignent les fonctions enrichies définies par:

$$\{F_k(r, \theta)\}_{k=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \right\} \quad (2.31)$$

Pour la généralisation d'un problème contenant une singularité quelconque, l'approximation de la X-FEM est sous la forme:

$$u^h(\mathbf{x}) = \underbrace{\sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i}_{u^{FEM}} + \underbrace{\sum_{k=1}^m N_k(\mathbf{x}) \psi(\mathbf{x}) \mathbf{a}_k}_{u^{enr}} \quad (2.32)$$

où la fonction enrichie $\psi(\mathbf{x})$ peut être choisie ou construite en se basant sur *la solution analytique connue a priori*.

Nous déduisons ici quelques remarques sur l'approximation de la X-FEM:

- La partie enrichie u^{enr} introduite par la X-FEM ne remplace pas u^{FEM} de la FEM. En revanche, l'enrichissement *compense* l'approximation standard pour mieux approcher la solution du problème qui contient la singularité. Plus exactement, u^{FEM} présente le champ du déplacement du domaine "sain" — *i.e.* le domaine sans singularité — tandis que u^{enr} est ajouté en tenant compte de la présence de la singularité.
- Pour un noeud \mathbf{x}_j dans la zone enrichie dont la description est ultérieurement énoncée, le champ (2.32) devient:

$$u^h(\mathbf{x}_j) = \mathbf{u}_j + \psi(\mathbf{x}_j) \mathbf{a}_j \quad (2.33)$$

L'interpolation aux nœuds n'est pas donc assurée dans la zone enrichie. Afin de remédier à ce problème, l'approximation (2.32) est fréquemment remplacée par:

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x}) \mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^m N_k(\mathbf{x}) (\psi(\mathbf{x}) - \psi(\mathbf{x}_k)) \mathbf{a}_k \quad (2.34)$$

ce qui donne exactement l'interpolation au nœud $u^h(\mathbf{x}_j) = \mathbf{u}_j$.

- La fonction enrichie $\psi(\mathbf{x})$ est elle-même *globale*, mais son influence est absolument *locale* à cause de sa multiplication par la fonction de forme nodale $N_k(\mathbf{x})$ et de la définition de la zone enrichie.
- Le degré de liberté \mathbf{a}_k est ajouté dans le but de faciliter la modélisation de la singularité sans sa représentation explicite par le maillage des éléments finis. Nous pouvons appeler \mathbf{a}_k *le paramètre d'enrichissement* pour bien le distinguer du degré de liberté classique \mathbf{u}_i , surtout dans la formule (2.34).

La construction des fonctions enrichies dépend du type du problème et surtout du comportement de la singularité. Nous allons clarifier le choix des fonctions enrichies et également la détermination de la zone enrichie à travers de l'application de la X-FEM pour deux types de discontinuité: forte et faible.

2.2.3. X-FEM dans la modélisation de fortes discontinuités

Une forte discontinuité typique traitée par la X-FEM est la fissure. En étendant l'approximation proposée par (Belytschko *et al.*, 1999), (Moës *et al.*, 1999) et (Dolbow *et al.*, 2000a) ont construit la formulation relativement complète de la X-FEM pour modéliser la fissure.

Considérons un domaine Ω qui contient une fissure Γ_d . Le maillage uniforme en quadrangles est appliqué pour ce domaine. La fissure est indépendante du maillage — *i.e.* la fissure ne doit pas passer par les arêtes des éléments.

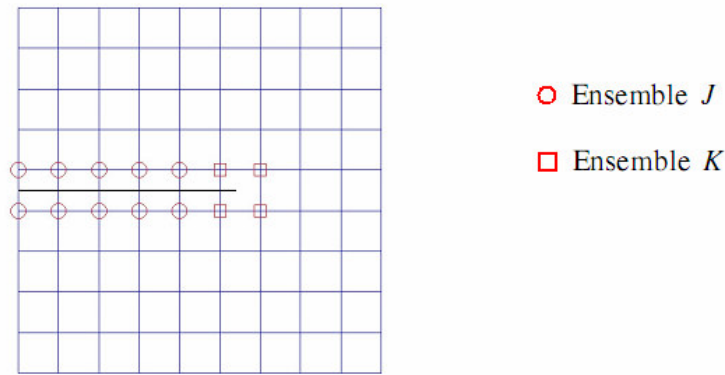


Figure 2.8: Enrichissement d'un domaine contenant une fissure

La Figure 2.8 présente l'enrichissement par la X-FEM pour le domaine Ω . L'approximation du déplacement est donnée par:

$$u^h = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j N_j H(\mathbf{x}) + \sum_{k \in K} N_k \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_k^l F_l(\mathbf{x}) \right) \quad (2.35)$$

Afin de conserver l'interpolation aux nœuds, l'approximation (2.35) peut être réécrite sous la forme:

$$u^h = \sum_{i \in I} \mathbf{u}_i N_i + \sum_{j \in J} \mathbf{b}_j N_j \left(H(\mathbf{x}) - H(\mathbf{x}_j) \right) + \sum_{k \in K} N_k \left(\sum_{l=1}^4 \mathbf{c}_k^l \left(F_l(\mathbf{x}) - F_l(\mathbf{x}_k) \right) \right) \quad (2.36)$$

où \mathbf{u}_i sont les déplacements nœdaux, \mathbf{b}_j et \mathbf{c}_k^l sont les paramètres d'enrichissement, $H(\mathbf{x})$ et $F_l(\mathbf{x})$ sont les fonctions enrichies, I, J et K sont respectivement les ensembles des nœuds de tout domaine, des nœuds enrichis par $H(\mathbf{x})$ et des nœuds enrichis par $F_l(\mathbf{x})$. Ces définitions sont précisées juste ci-après.

La fonction $H(\mathbf{x})$ est choisie pour "capturer" la discontinuité du déplacement en passant la ligne de la fissure Γ_d . C'est pourquoi, n'importe quelle fonction qui est discontinue à travers de Γ_d peut être utilisée comme fonction enrichie, mais le choix le plus simple pour $H(\mathbf{x})$ est une fonction constante dont le signe est changé de l'un à l'autre côté de Γ_d . Si nous définissons un système de coordonnées $\mathbf{x} = (x, y)$ avec l'axe de y se coïncide avec Γ_d , $H(\mathbf{x})$ est déterminée pour deux côtés de Γ_d par:

$$H(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour } y > 0 \\ -1 & \text{pour } y < 0 \end{cases} \quad (2.37)$$

L'utilisation de $H(\mathbf{x})$ pour l'enrichissement de la fissure est relativement simple et explicite. Cependant, dans le cas où la fissure ne s'arrête pas sur le bord de l'élément, $H(\mathbf{x})$ n'est pas capable de modéliser complètement la fissure. Les fonctions enrichies asymptotiques $F_l(\mathbf{x})$ doivent être rajoutées afin de tenir compte de la zone autour de la pointe de la fissure.

Les fonctions $F_l(\mathbf{x})$ sont construites à partir du champ asymptotique exact de déplacement au voisinage de la pointe de la fissure:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 + 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 - 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{Bmatrix} \\ + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \begin{Bmatrix} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa + 1 + 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \\ -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\kappa - 1 - 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (2.38)$$

où (r, θ) est le système de coordonnées polaires dont l'origine se situe à la pointe de la fissure, K_I et K_{II} sont les facteurs d'intensité des contraintes, μ et κ sont les paramètres du matériau.

(Flemming *et al.*, 1997) ont extrait de (2.38) les quatre fonctions indépendantes $F_l(\mathbf{x})$:

$$\{F_l(r, \theta)\}_{l=1}^4 = \left\{ \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right), \sqrt{r} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta, \sqrt{r} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin \theta \right\} \quad (2.39)$$

Notons que seule la fonction F_1 est *discontinue* à travers la fissure alors que les autres fonctions sont *continues*.

Il est bien évident que les fonctions enrichies asymptotiques $F_l(\mathbf{x})$ améliorent nettement l'exactitude de la modélisation de la fissure parce qu'elles contiennent des informations sur *la solution asymptotique exacte* au voisinage de la pointe de la fissure.

Revenons à la définition des ensembles J et K . En notant \mathbf{x}_p la coordonnée de la pointe de la fissure, l'ensemble K consiste en des nœuds dont le support contient la pointe. L'ensemble J comporte des nœuds dont le support est intersecté par la fissure et ces nœuds n'appartiennent pas à l'ensemble K :

$$\begin{aligned} K &= \{k \in I : \mathbf{x}_p \in \bar{\omega}_k\} \\ J &= \{j \in I : \omega_j \cap \Gamma_d \neq \emptyset, j \notin K\} \end{aligned} \quad (2.40)$$

Dans la Figure 2.8, les nœuds enrichis sont marqués en rouge, les cercles désignent les nœuds de J et les carrés sont utilisés pour les nœuds de K .

Dans la version originale de la X-FEM, l'ensemble K ne comprend que les nœuds de l'élément contenant la pointe de la fissure. Par conséquent, le support des fonctions enrichies asymptotiques disparaît lorsque le paramètre du maillage h tend vers zéro, ce qui donne le faible taux de convergence. Une stratégie présentée par (Laborde *et al.*, 2005) consiste à enrichir une

zone *fixée* autour de la pointe de la fissure. La zone enrichie est normalement définie sous forme d'un cercle dont le centre est la coordonnée \mathbf{x}_p de la pointe (Figure 2.9).

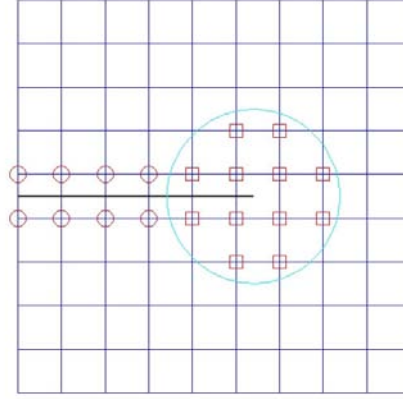


Figure 2.9: Enrichissement d'une zone fixée autour de la pointe de la fissure

2.2.4. X-FEM dans la modélisation de faibles discontinuités

Outre l'application originale dans la modélisation des fissures, la X-FEM est utilisée avec succès pour modéliser de faibles discontinuités avec le cas d'exemple typique de l'interface bimatériaux. Dans la X-FEM, l'interface est représentée indépendante du maillage des éléments finis. Sa présence est prise en compte par des fonctions enrichies qui sont continues sur le champ primordial mais peuvent faire apparaître la discontinuité sur le gradient en traversant l'interface. L'idée la plus souvent abordée consiste à profiter de la fonction de niveau pour construire les fonctions enrichies.

La fonction de niveau (*Level Set*) est une définition *implicite* d'une surface (dans le cas 3D) ou d'une interface (pour le cas 2D). Il existe plusieurs types de fonctions qui satisfont à cette définition, mais *la fonction distance signée* est généralement utilisée (Belytschko *et al.*, 2001):

$$\phi(\mathbf{x}) = \pm \min_{\mathbf{x}_\Gamma \in \Gamma} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\Gamma\| \quad (2.41)$$

où le signe de $\phi(\mathbf{x})$ est différent des deux côtés de l'interface ou de la surface de discontinuité Γ ,

$\|\bullet\|$ désigne la norme euclidienne.

La valeur de la fonction $\phi(\mathbf{x})$ à un point \mathbf{x} du domaine peut être calculée par l'interpolation de la PUFEM:

$$\phi(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x})\phi_i \quad (2.42)$$

où ϕ_i sont les valeurs nodales de la fonction de distance signée.

L'approximation du déplacement de la X-FEM pour le problème de l'interface intérieure est similaire à la formulation générale (2.32):

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n N_i(\mathbf{x})\mathbf{u}_i + \sum_{k=1}^m N_k(\mathbf{x})\psi(\mathbf{x})\mathbf{a}_k \quad (2.43)$$

Les noeuds dont le support est intersecté par l'interface sont enrichis à l'aide de la fonction enrichie $\psi(\mathbf{x})$ (Figure 2.10).

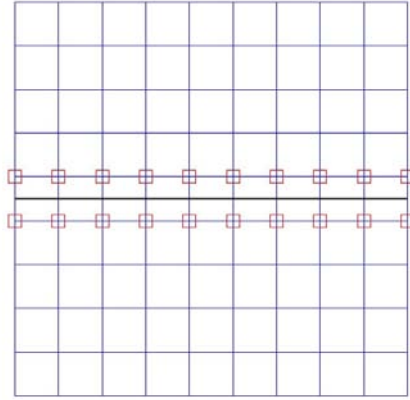


Figure 2.10: Enrichissement d'un domaine contenant une interface intérieure

Pour la construction de la fonction enrichie $\psi(\mathbf{x})$ à partir de la fonction de distance signée $\phi(\mathbf{x})$, un certain nombre de possibilités sont abordées suivant les idées de (Moës *et al.*, 2003) ou de (Béchet, 2008):

- Première variante:

$$\psi^1(\mathbf{x}) = |\phi(\mathbf{x})| \quad (2.44)$$

- Deuxième variante:

$$\psi^2(\mathbf{x}) = \begin{cases} |\phi(\mathbf{x})| & \text{pour les éléments coupés par l'interface} \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2.45)$$

- Troisième variante:

$$\psi^3(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n |\phi_i| N_i(\mathbf{x}) - \left| \sum_{i=1}^n \phi_i N_i(\mathbf{x}) \right| \quad (2.46)$$

La Figure 2.11 présente trois variantes différentes pour le choix de la fonction enrichie $\psi(\mathbf{x})$. Selon les auteurs, en pratique, $\psi^3(\mathbf{x})$ donne les meilleurs résultats pour l'approximation du problème de l'interface bimatériaux.

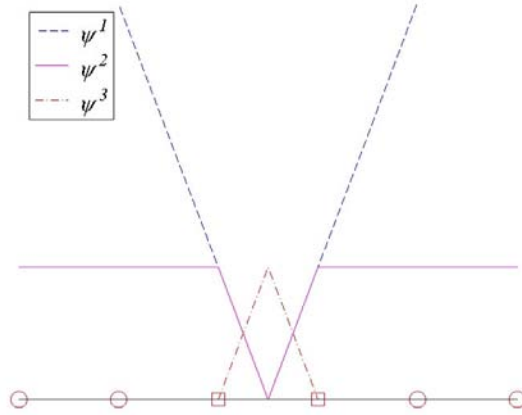


Figure 2.11: Différentes variantes du choix de la fonction enrichie

Cependant, les trois variantes de fonction enrichie ci-dessus ne peuvent être appliquées que pour une interface "ordinaire" — *i.e.* l'interface ne présente que la discontinuité sur le gradient. En revanche, dans le cas où il existe une *couche limite* au voisinage de l'interface, par exemple la diffusion de part et d'autre de l'interface, le choix de la fonction enrichie doit se baser sur la solution connue *a priori* du problème.

(Smith *et al.*, 2007) ont proposé une forme *exponentielle* de la fonction enrichie:

$$\psi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 - \exp(\mu\phi(\mathbf{x})) & \text{pour } \phi(\mathbf{x}) > 0 \\ \phi(\mathbf{x}) & \text{pour } \phi(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (2.47)$$

où μ est un paramètre du problème.

La forme (2.47) de la fonction enrichie fonctionne bien pour les problèmes de l'interface dans la couche limite dont le comportement est *exponentiel*. En même temps, les auteurs ont ainsi montré l'effet positif d'enrichir une zone plus large que les éléments contenant l'interface. L'extension du domaine enrichi permet d'appliquer l'enrichissement partout dans la couche limite, l'approximation donc devient plus complète.

2.2.5. Programmation de la X-FEM

L'originalité de la X-FEM est développée dans l'environnement du langage C++ par (Moës *et al.*, 1999) et (Daux *et al.*, 2000).

(Bordas *et al.*, 2006) ont profité des avantages de la programmation orientée objet (POO) pour compiler un package C++ pour la X-FEM intitulé OpenXFEM++.

Un autre travail proposé par (Sukumar *et al.*, 2003) consiste à incorporer la formulation de la X-FEM dans un programme des éléments finis classiques créé à l'aide du langage Fortran — Dynaflow™.

Ces développements de la programmation de la X-FEM sont bien adaptés pour des simulations à *grande échelle* (le cas tridimensionnel, la propagation des fissures, les non linéarités ...), mais ils demandent aussi un haut niveau de programmation et de compilation. Par contre, lorsque nous avons commencé la formulation de la X-FEM, un code de calcul plus simple à manipuler semble un choix approprié. Nous pouvons nous inspirer des routines Matlab composées par (Nguyen, 2006). Les routines originales servent à résoudre le problème bidimensionnel des fissures par la X-FEM mais cela ne nous empêche pas de les appliquer dans notre problème de modélisation des assemblages brasés.

Suivant une étude menée par (Mohammadi, 2008), malgré des différences dépendant des caractéristiques du problème et de la singularité, les étapes essentielles d'un code de calcul utilisant la X-FEM consiste en:

- Définition du modèle examiné
- Génération du maillage standard des éléments finis
- Représentation de la singularité, soit explicite par sa géométrie, soit implicite par la fonction de niveau
- Détection des nœuds ou des éléments enrichis
- Définition des fonctions enrichies et évaluation de leurs dérivées
- Calcul des opérateurs des éléments finis
- Résolution des équations linéaires
- Post-traitement

Un point délicat dans le code de calcul utilisant la X-FEM est l'intégration numérique. Le calcul numérique des intégrales pour des éléments finis est habituellement basé sur la méthode d'intégration numérique de Gauss. Cette méthode donne une solution fiable pour les intégrales

des polynômes sur un domaine continu. Pourtant, la singularité fait apparaître la discontinuité dans le domaine examiné. En outre, les fonctions enrichies prennent le plus souvent une forme non polynomiale. Il faut alors modifier la méthode d'intégration numérique de Gauss afin d'améliorer la précision de l'intégration numérique dans le calcul de la X-FEM (Dolbow, 1999).

Pour les éléments intersectés par la singularité, nous appliquons la technique de triangulation en respectant la ligne de discontinuité, *i.e.* ces éléments sont divisés en des sous-triangles dont les arêtes s'alignent avec la singularité (Figure 2.12). La méthode d'intégration numérique de Gauss est appliquée pour les sous-triangles identiquement pour les éléments. Notons que les sous-triangles sont nécessaires seulement pour le processus d'intégration, aucun degré de liberté n'est ajouté à cause de la construction des sous-triangles.

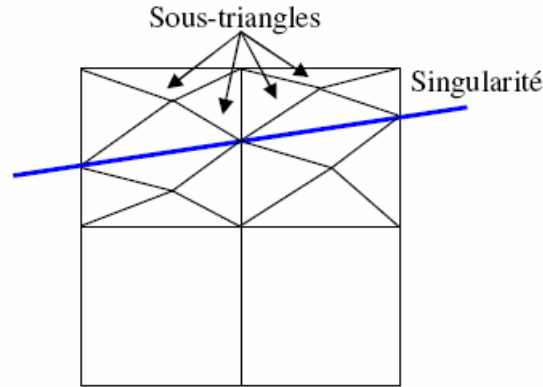


Figure 2.12: Triangulation des éléments intersectés par la singularité

2.3. Conclusion

Ce chapitre se focalise sur le principe et les points essentiels et caractéristiques de deux méthodes: la méthode des développements asymptotiques raccordés et la méthode des éléments finis étendus.

La méthode des DAR nous fournit une approche pour des problèmes de perturbation singulière dont la présence d'une singularité caractérisée par un petit paramètre intrinsèque ε empêche de déterminer la solution explicite. L'influence de la singularité est confinée dans une zone autour d'elle-même qui s'appelle la couche limite. En divisant le problème "*original*" en deux problèmes dérivés, la méthode des DAR propose deux développements asymptotiques de ε valables respectivement pour chaque problème. Le premier problème, extérieur, donne la solution qui est valable loin de la singularité ou à l'extérieur de la couche limite. Le deuxième problème,

intérieur, apporte la solution dont la validité est dans la couche limite ou proche de la singularité. Le lien entre deux solutions dans une région intermédiaire est assuré par la règle de raccordement de Van Dyke.

En mécanique des solides, la méthode des DAR est appliquée pour modéliser des structures contenant des défauts (fissure, porosité, délaminage, ...) ou des hétérogénéités (fibre, inclusion, ...). En particulier, une application de la méthode des DAR qui concerne étroitement notre étude est la modélisation des assemblages collés. Nous pouvons certainement exploiter ces résultats afin de dégager une approche asymptotique pour le comportement des assemblages brasés.

Etant aussi utilisée pour résoudre les problèmes des singularités, mais contrairement à la méthode des DAR qui peut nous donner des solutions asymptotiques de façon analytique ou semi-analytique, la X-FEM donne une solution purement numérique. Se basant sur la méthode de partition de l'unité, la X-FEM permet d'améliorer les déficiences de la FEM. Dans la X-FEM, la singularité est indépendante du maillage des éléments finis, *i.e.* il n'est pas nécessaire de raffiner le maillage autour de la singularité comme dans la FEM. Par contre, la présence de la singularité est prise en compte à l'aide d'une ou des fonctions spéciales appelées fonctions enrichies. Comme les fonctions enrichies représentent un comportement particulier de la solution que la FEM ne peut pas interpréter, le choix de ces fonctions joue un rôle crucial pour l'approximation par la X-FEM.

En général, les fonctions enrichies sont choisies en se basant sur des raisonnements préliminaires sur la nature du problème et de la singularité considérés. Par exemple, pour la fissure, le champ du déplacement doit être discontinu à travers sa géométrie. Un choix évident issu de ce raisonnement est d'utiliser une fonction dont la valeur est constante et dont le signe change en traversant la ligne de la fissure. Cependant, des raisonnements préliminaires n'apportent pas toujours des informations pertinentes pour le choix des fonctions enrichies. Une mesure plus efficace consiste à incorporer des informations connues *a priori* sur la solution du problème dans les fonctions enrichies. Dans le contexte des fissures, cette mesure fonctionne bien en ajoutant des fonctions enrichies qui sont dérivées de la solution de la mécanique de la rupture autour de la pointe des fissures.

Dans notre étude, la modélisation des assemblages brasés à l'aide de la X-FEM exige des fonctions enrichies pertinentes. A cause de la présence d'une couche limite au voisinage du joint brasé, les fonctions enrichies pour les interfaces ordinaires ne sont pas utilisables. Il nous faut des

fonctions enrichies qui se basent sur les informations du comportement de l'assemblage brasé en tenant compte du joint. Afin de générer ces fonctions, nous proposons le couplage de deux méthodes DAR et X-FEM dont les détails sont présentés dans le chapitre suivant.

Bibliographie

Abdelmoula, R., Coutris, M. et Marigo, J.-J. (1998). Comportement asymptotique d'une interphase élastique mince. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences - Series IIB - Mechanics-Physics-Chemistry-Astronomy*, **326**, 237-242.

Abdelmoula, R. et Marigo, J.-J. (1997). Modélisation des défauts par des méthodes multiéchelles. *Analysis multiéchelle et systèmes physiques couplés*, Paris, France.

Béchet, E. (2008). Une introduction à la méthode des éléments finis étendus (X-FEM).

Belytschko, T. et Black, T. (1999). Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45** (5), 601-620.

Belytschko, T., Moës, N., Usui, S. et Parimi, C. (2001). Arbitrary discontinuities in finite elements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, 993 - 1013.

Bordas, S., Nguyen, V. P., Dunant, C., Guidoum, A. et Nguyen, D. H. (2006). An extended finite element library. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **71**, 703 - 732.

Chen, L. Y., Goldenfeld, N. et Oono, Y. (1996). Renormalization group and singular perturbations: Multiple scales, boundary layers, and reductive perturbation theory. *Physical Review E*, **54**, 376-394.

Cousteix, J. et Mauss, J. (2006). *Analyse asymptotique et couche limite*. Springer.

Daux, C., Moës, N., Dolbow, J., Sukumar, N. et Belytschko, T. (2000). Arbitrary Branched and Intersecting Cracks with the eXtended Finite Element Method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, 1741-1760.

De Jaeger, E. M. et Furu, J. (1996). The theory of singular perturbations. *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics*, **42**.

Dolbow, J. (1999). *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, USA.

Dolbow, J., Moës, N. et Belytschko, T. (2000a). Discontinuous enrichment in finite elements with a partition of unity method. *Finite Elements in Analysis and Design*, **36**, 235-260.

- Dolbow, J., Moës, N. et Belytschko, T. (2000b). Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method. *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 7161-7183.
- Flemming, M., Chu, Y. A., Moran, B. et Belytschko, T. (1997). Enriched element-free Galerkin methods for crack tip fields. *International journal for numerical methods in engineering*, **40**, 1483-1504.
- Friedrichs, K. O. (1942). Theory of viscous fluids. *Fluid Dynamics*. Brown University.
- Fries, T. P. (2008). A corrected XFEM approximation without problems in blending elements. *International journal for numerical methods in engineering*, **75**, 503-532.
- Kaplun, S. (1957). Low Reynolds number flow past a circular cylinder. *Journal of Mathematics and Mechanics*, **6**, 595-603.
- Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y. et Salaün, M. (2005). High-order extended finite element method for cracked domains. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **64**, 354 - 381.
- Leguillon, D. et Abdelmoula, R. (1999). Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint. *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 2651-2672.
- Mahony, J. J. (1962). An expansion method for singular perturbation problems. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **2**, 440-463.
- Melenk, J. M. et Babuska, I. (1996). The partition of unity finite element method: Basic theory and applications. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, 289-314.
- Moës, N., Cloirec, M., Cartraud, P. et Remacle, J. F. (2003). A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Multiscale Computational Mechanics for Materials and Structures*, **192**, 3163-3177.
- Moës, N., Dolbow, J. et Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 131-150.
- Moës, N., Gravouil, A. et Belytschko, T. (2002). Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part I: Mechanical model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **53**, 2549-2568.
- Mohammadi, S. (2008). *Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures*. Blackwell Publishing Ltd.

Nguyen, V. P. (2005). *An object oriented approach to the extended finite element method with applications to fracture mechanics*. Hochiminh City University of Technology, Vietnam.

Nguyen, V. P. (2006). Extended finite element MATLAB code.

Rabczuk, T. et Wall, W. A. (2007). Extended Finite Element and Meshfree Methods. *Short course for 3rd-Pro and Postgraduates*.

Smith, B. G., Vaughan, B. L. et Chopp, D. L. (2007). The extended finite element method for boundary layer problems in biofilm growth. *Communications in Applied Mathematics and Computational Science*, **2**, 35-56.

Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N. et Belytschko, T. (2000a). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 6183-6200.

Sukumar, N., Moës, N., Moran, B. et Belytschko, T. (2000b). Extended Finite Element Method for Three-Dimensional Crack Modelling. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **48**, 1549–1570.

Sukumar, N. et Prévost, J.-H. (2003). Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part I: Computer implementation. *International Journal of Solids and Structures*, **40**, 7513-7537.

Van Dyke, M. (1975). *Perturbation methods in fluid mechanics*. The Parabolic Press, Stanford, California.

Chapitre 3

Couplage des méthodes DAR et
X-FEM pour la modélisation unidimensionnelle
des assemblages brasés

Chapitre 3 Couplage des méthodes DAR et X-FEM pour la modélisation unidimensionnelle des assemblages brasés	69
3.1. Modélisation 1D à l'aide du couplage DAR – X-FEM d'un assemblage brasé en traction simple.....	69
3.1.1. Modèle unidimensionnel de l'assemblage brasé	69
3.1.2. Approche des DAR	72
3.1.2.1. Développement extérieur.....	72
3.1.2.2. Développement intérieur	73
3.1.2.3. Raccordement.....	73
3.1.2.4. Calcul des termes	74
3.1.3. Formulation de la X-FEM	76
3.1.4. Couplage DAR-X-FEM – Méthode relative aux fonctions enrichies.....	78
3.1.4.1. Principe du couplage	78
3.1.4.2. Différentes variantes d'enrichissement	80
3.1.4.2.1. Modèle analytique	81
3.1.4.2.2. Première variante.....	82
3.1.4.2.3. Deuxième variante.....	86
3.1.4.2.4. Troisième variante	89
3.1.4.2.5. Quatrième variante.....	92
3.1.4.2.6. Comparaison des variantes d'enrichissement et remarques sur la méthode relatives aux fonctions enrichies.....	94
3.1.5. Couplage DAR-X-FEM – Méthode relative aux paramètres d'enrichissement.....	97
3.1.5.1. Principe du couplage	98
3.1.5.2. Cinquième variante.....	101
3.2. Couplage DAR - X-FEM pour le problème thermique transitoire unidimensionnel de l'assemblage brasé.....	108
3.2.1. Modèle thermique unidimensionnel de l'assemblage brasé	108
3.2.2. Approche des DAR en régime permanent	109
3.2.3. Formulation variationnelle de la X-FEM pour le problème transitoire.....	110
3.2.4. Fonctions enrichies.....	114

3.2.5.	Validation à l'aide de la méthodes des quadripôles	115
3.2.6.	Application numérique	117
3.3.	Conclusion	120
	Bibliographie	122

Chapitre 3

Couplage des méthodes DAR et X-FEM pour la modélisation unidimensionnelle des assemblages brasés

Comme nous l'avons vu dans le chapitre précédent, la présence du joint brasé, caractérisé par un petit paramètre intrinsèque ε , provoque une perturbation singulière dans le problème de l'assemblage brasé. C'est pourquoi nous envisageons d'utiliser la méthode des DAR pour trouver la solution asymptotique du modèle de l'assemblage brasé.

D'autre part, pour un domaine contenant une singularité comme l'assemblage brasé, la X-FEM est la solution numérique la plus prometteuse comparée à celle de la FEM classique. Suivant le chapitre 2, un point essentiel de la X-FEM est d'incorporer des informations connues *a priori* sur l'influence de la singularité à un certain nombre de nœuds du maillage standard à travers la partie enrichie. Le couplage des deux méthodes DAR et X-FEM est destiné à construire la partie enrichie de la X-FEM à partir des solutions analytiques ou semi-analytiques des DAR.

Dans ce chapitre, nous proposons deux méthodes pour le couplage DAR-X-FEM: une méthode relative aux fonctions enrichies et une méthode relative aux paramètres d'enrichissement. Les différentes variantes d'enrichissement sont présentées au travers du cas unidimensionnel de l'assemblage brasé. La validité de la mise en œuvre du couplage DAR-X-FEM est présentée pour deux problèmes typiques: traction simple et conduction thermique en régime transitoire.

3.1. Modélisation 1D à l'aide du couplage DAR – X-FEM d'un assemblage brasé en traction simple

3.1.1. Modèle unidimensionnel de l'assemblage brasé

Considérons un modèle unidimensionnel Ω de l'assemblage brasé constitué de deux substrats Ω^1 et Ω^3 qui sont reliés par l'intermédiaire d'un joint brasé Ω^2 (Figure 3.1). Dans le cas

unidimensionnel classique, seule la longueur est considérée comme unique dimension. Cependant, afin de conserver le sens physique du modèle réel de l'assemblage brasé, nous utilisons l'épaisseur plutôt que la longueur. Les deux substrats possèdent une même épaisseur l , tandis que celle du joint brasé est égale à e_j . L'épaisseur totale de l'assemblage, L , est alors donnée par:

$$L = 2l + e_j \quad (3.1)$$

Les modules d'Young sont notés E_1, E_2 et E_3 dans les trois sous-domaines Ω^1, Ω^2 et Ω^3 , respectivement.

En l'absence de force volumique, l'assemblage est sollicité seulement par les conditions aux limites: l'encastrement à l'extrémité de gauche ($x = -\frac{L}{2}$) et un déplacement imposé U^d à l'extrémité de droite ($x = \frac{L}{2}$).

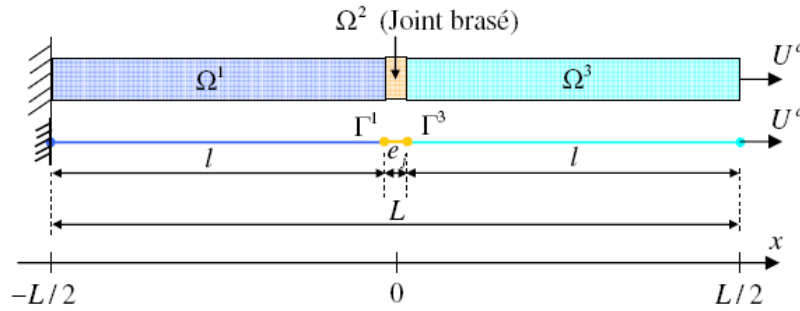


Figure 3.1: Modèle physique et schématisation unidimensionnelle de l'assemblage brasé

Pour ce modèle, nous admettons les hypothèses suivantes:

- L'épaisseur du joint brasé est très petite devant celle d'un des substrats ($e_j \ll l$).
- Les deux matériaux de base des substrats Ω^1 , Ω^3 et l'alliage d'apport du joint brasé Ω^2 sont élastiques linéaires, homogènes et isotropes.
- La rigidité de l'alliage d'apport est du même ordre de grandeur que celle d'un des substrats ($E_2 \sim E_1, E_3$).
- Les interfaces joint - substrats Γ^1 et Γ^3 — dégénérées aux points dans le modèle unidimensionnel — sont parfaites, *i.e.* il n'existe pas de glissement relatif entre le joint et les substrats.

Les équations du problème définissant le déplacement $u(x)$ du modèle unidimensionnel de l'assemblage brasé sont données par:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega^1, \Omega^2 \text{ et } \Omega^3 \quad (3.2)$$

$$\sigma = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{dans } \Omega^1, \Omega^2 \text{ et } \Omega^3 \quad (3.3)$$

$$[[u]] = [[\sigma]] \underline{n} = 0 \quad \text{au travers de } \Gamma^1 \text{ et } \Gamma^3 \quad (3.4)$$

$$\begin{cases} u(x = -\frac{L}{2}) = 0 \\ u(x = \frac{L}{2}) = U^d \end{cases} \quad (3.5)$$

où E prend la valeur de E_1, E_2 ou E_3 dans Ω^1, Ω^2 et Ω^3 , respectivement, $[[\bullet]]$ présente le saut d'une quantité au travers d'une interface et \underline{n} désigne le vecteur normal de l'interface considérée. Afin de faciliter tous les calculs, nous choisissons l'épaisseur totale de l'assemblage brasé L comme la dimension de référence et nous définissons les épaisseurs adimensionnelles:

$$\tilde{l} = \frac{l}{L}; \quad \varepsilon = \frac{e_j}{L} \quad (3.6)$$

Le modèle physique de l'assemblage brasé est adimensionné par une homothétie de rapport $\frac{1}{L}$ comme l'illustre de la Figure 3.2. Toutes les équations du problème sont maintenant définies sur le modèle adimensionné. Nous réutilisons Ω , Ω^1, Ω^2 et Ω^3 pour désigner le domaine global et les sous-domaines des strates et du joint brasé adimensionnés, respectivement.

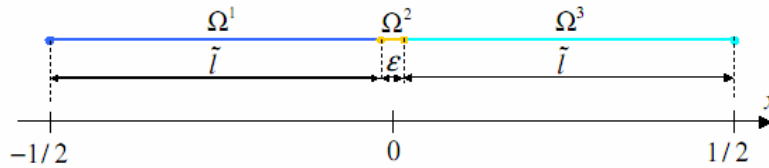


Figure 3.2: Modèle unidimensionnel adimensionné par L

Suivant l'hypothèse de l'épaisseur faible du joint brasé, l'épaisseur adimensionnelle ε devient un petit paramètre sans dimension ($\varepsilon \ll 1$) qui caractérise la présence du joint brasé dans l'assemblage brasé.

3.1.2. Approche des DAR

(Leguillon *et al.*, 1999) ont appliqué la méthode des DAR pour déterminer le déplacement hors plan du problème de l'assemblage collé. Dans notre travail, nous exploitons ces résultats et les adaptons au modèle unidimensionnel de l'assemblage brasé.

3.1.2.1. Développement extérieur

Lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, le domaine réel Ω ($\Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Omega^3$) devient un domaine extérieur Ω^{ext} qui ne contient que deux parties Ω^1 et Ω^3 , *i.e.* sans le joint brasé Ω^2 (Figure 3.3). Le développement extérieur du déplacement est défini sur le domaine Ω^{ext} et écrit sous la forme:

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x) + \varepsilon u^1(x) + \dots \quad (3.7)$$

où u^0 est la solution du problème non-perturbé ($\varepsilon \rightarrow 0$).

En supposant que chaque terme de (3.7) soit continu par morceaux, on peut appliquer les développements limités de Taylor par rapport à x de part et d'autre de l'interface:

$$u_\pm^j(x) = u_\pm^j(0) + x \frac{\partial u_\pm^j}{\partial x}(0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 u_\pm^j}{\partial x^2}(0) + \dots \quad (3.8)$$

où \pm pour $x > 0$ et $x < 0$, respectivement; $j = 0, 1, 2, \dots$

Le développement extérieur (3.7), tenant compte des développements limités de Taylor, alors devient:

$$u_\pm^\varepsilon(x) = u_\pm^0(0) + x \frac{\partial u_\pm^0}{\partial x}(0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 u_\pm^0}{\partial x^2}(0) + \varepsilon \left[u_\pm^1(0) + x \frac{\partial u_\pm^1}{\partial x}(0) + \frac{x^2}{2} \frac{\partial^2 u_\pm^1}{\partial x^2}(0) \right] + \dots \quad (3.9)$$

Notons que u^0 satisfait parfaitement à la condition de continuité à travers l'interface commune

$\Gamma^{13} : \llbracket u^0 \rrbracket = 0 \Rightarrow u_+^0(0) = u_-^0(0)$, comme exprime partiellement en (3.4).

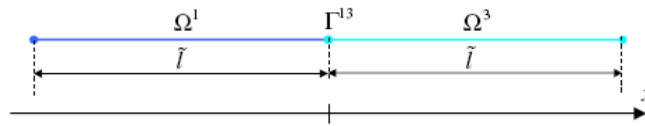


Figure 3.3: Domaine extérieur Ω^{ext}

3.1.2.2. Développement intérieur

Afin de définir le développement intérieur qui est valable sur le domaine intérieur Ω^{int} , nous introduisons un changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$. Quand $\varepsilon \rightarrow 0$, le domaine intérieur Ω^{int} devient infini. Sa partie gauche appartient à Ω^1 et sa partie droite est dans Ω^3 . Le segment au milieu dont l'épaisseur est l'unité est le joint brasé étiré par le changement de variable (cf. Figure 3.4).

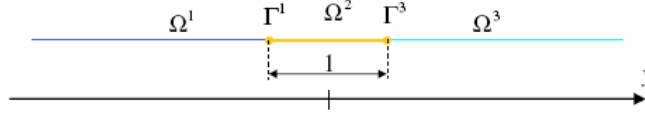


Figure 3.4: Domaine intérieur Ω^{int} en changeant $y = \frac{x}{\varepsilon}$

Le développement intérieur du déplacement donc s'écrit:

$$v^\varepsilon(y) = v^0(y) + \varepsilon v^1(y) + \dots \quad (3.10)$$

3.1.2.3. Raccordement

Suivant la règle de raccordement (Van Dyke, 1975), les deux développements extérieur et intérieur coïncident dans une zone intermédiaire:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\text{Développement extérieur}) = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (\text{Développement intérieur}) \quad (3.11)$$

Nous réécrivons l'équation (3.9) en tenant compte du changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$:

$$u^\varepsilon(x) = u^0(0) + \varepsilon \left(y \frac{\partial u_\pm^0}{\partial x}(0) + u_\pm^1(0) \right) + \varepsilon^2 \left(\frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 u_\pm^0}{\partial x^2}(0) + y \frac{\partial u_\pm^1}{\partial x}(0) + u_\pm^2(0) \right) + \dots \quad (3.12)$$

La règle générale de raccordement (3.11) est appliquée pour chaque terme de même puissance de ε dans les deux développements (3.10) et (3.12):

$$\begin{cases} \lim_{y \rightarrow \pm\infty} (v^0(y) - u^0(0)) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(v_\pm^1(y) - y \frac{\partial u_\pm^0}{\partial x}(0) - u_\pm^1(0) \right) = 0 \\ \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left(v_\pm^2(y) - \frac{y^2}{2} \frac{\partial^2 u_\pm^0}{\partial x^2}(0) - y \frac{\partial u_\pm^1}{\partial x}(0) - u_\pm^2(0) \right) = 0 \\ \vdots \end{cases} \quad (3.13)$$

3.1.2.4. Calcul des termes

Pour la généralisation, nous ne prenons provisoirement pas en compte les conditions aux limites spécifiques (3.5) et les remplaçons par U_{b1} et U_{b2} qui sont respectivement les déplacements de deux extrémités du domaine Ω^{ext} . En outre, les coordonnées de ces deux extrémités consistent en x_{b1} et x_{b2} , respectivement.

Le problème des premiers termes extérieurs u_{\mp}^0 sur le domaine Ω^{ext} est bien posé. Il provient directement des équations du problème initial:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{\mp}^0}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \Omega^1, \Omega^3 \text{ respectivement} \\ \sigma_{\mp}^0 = E_{1(3)} \frac{\partial u_{\mp}^0}{\partial x} & \text{dans } \Omega^1, \Omega^3 \text{ respectivement} \\ \llbracket u^0 \rrbracket = \llbracket \sigma^0 \rrbracket n = 0 & \text{au travers de } \Gamma^{13} \\ u_{-}^0(x = x_{b1}) = U_{b1}; u_{+}^0(x = x_{b2}) = U_{b2} \end{cases} \quad (3.14)$$

ce qui nous donne:

$$\begin{cases} u_{-}^0 = \frac{E_3(U_{b2} - U_{b1})}{E_1 x_{b2} - E_3 x_{b1}} x + \frac{E_1 x_{b2} U_{b1} - E_3 x_{b1} U_{b2}}{E_1 x_{b2} - E_3 x_{b1}} \\ u_{+}^0 = \frac{E_1(U_{b2} - U_{b1})}{E_1 x_{b2} - E_3 x_{b1}} x + \frac{E_1 x_{b2} U_{b1} - E_3 x_{b1} U_{b2}}{E_1 x_{b2} - E_3 x_{b1}} \end{cases} \quad (3.15)$$

Les termes suivants des deux développements extérieur et intérieur sont séquentiellement déterminés en se basant sur les équations du problème initial, la règle de raccordement (3.13) ainsi que les termes non-perturbés u_{\mp}^0 déjà connus.

L'équation d'équilibre et les conditions de continuité exigent que le premier terme intérieur v^0 soit constant dans tout le domaine intérieur Ω^{int} . Par ailleurs, la règle de raccordement donne une relation entre v^0 à l'infini et $u^0(0)$ qui nous aide à déduire la forme de v^0 :

$$v^0 = \frac{E_1 x_{b2} U_{b1} - E_3 x_{b1} U_{b2}}{E_1 x_{b2} - E_3 x_{b1}} \quad (3.16)$$

Les deuxièmes termes extérieurs u_{\mp}^1 ne peuvent pas être déterminés explicitement parce qu'ils ne vérifient pas la condition classique de continuité à travers de l'interface Γ^{13} . La règle de raccordement ajoute une condition sur le saut des deuxièmes termes extérieurs:

$$\llbracket u^1 \rrbracket = u_+^1(0) - u_-^1(0) = \frac{E_3 - E_2}{2E_2} \frac{du_+^0}{dx}(0) + \frac{E_1 - E_2}{2E_2} \frac{du_-^0}{dx}(0) \quad (3.17)$$

Notons que ce saut des deuxièmes termes extérieurs dépend des dérivées des termes non-perturbés u_{\pm}^0 à l'interface. Dans ce cas, une fois que u_{\pm}^0 sont connus (cf. (3.15)), le saut (3.17) est calculé explicitement:

$$\llbracket u^1 \rrbracket = \frac{(2E_1E_3 - E_2E_3 - E_1E_2)(U_{b2} - U_{b1})}{2E_2(E_1x_{b2} - E_3x_{b1})} \quad (3.18)$$

En posant $c_1 = 2E_1E_3 - E_2E_3 - E_1E_2$; $c_2 = E_1x_{b2} - E_3x_{b1}$, le saut (3.18) est réécrit:

$$\llbracket u^1 \rrbracket = \frac{c_1(U_{b2} - U_{b1})}{2E_2c_2} \quad (3.19)$$

En ajoutant la condition spéciale de continuité (3.19), le problème des deuxièmes termes du développement extérieur u_{\mp}^1 est donné par:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u_{\mp}^1}{\partial x^2} = 0 & \text{dans } \Omega^1, \Omega^3 \text{ respectivement} \\ \sigma_{\mp}^1 = E_{1(3)} \frac{\partial u_{\mp}^1}{\partial x} & \text{dans } \Omega^1, \Omega^3 \text{ respectivement} \\ \llbracket u^1 \rrbracket = \frac{c_1(U_{b2} - U_{b1})}{2E_2c_2} & \text{au travers de } \Gamma^{13} \\ u_-^1(x = x_{b1}) = 0; u_+^1(x = x_{b2}) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

La résolution du problème (3.20) nous donne les deuxièmes termes extérieurs u_{\mp}^1 :

$$\begin{cases} u_-^1 = \frac{E_3c_1(U_{b2} - U_{b1})(x_{b1} - x)}{2E_2c_2^2} \\ u_+^1 = \frac{E_1c_1(U_{b2} - U_{b1})(x_{b2} - x)}{2E_2c_2^2} \end{cases} \quad (3.21)$$

Une fois que les termes extérieurs sont connus, nous pouvons déduire les deuxièmes termes intérieurs $v_{\Omega_{\pm}^2}^1$ qui sont valables dans les sous-parties $\Omega_-^2(-\frac{1}{2} \leq y \leq 0)$ et $\Omega_+^2(0 \leq y \leq \frac{1}{2})$, respectivement:

$$\begin{cases} v_{\Omega_-^2}^1 = \frac{E_3}{2E_2c_2} \left[\frac{2E_1x}{\varepsilon} + (E_1 - E_2) + \frac{x_{b1}c_1}{c_2} \right] (U_{b2} - U_{b1}) \\ v_{\Omega_+^2}^1 = \frac{E_1}{2E_2c_2} \left[\frac{2E_3x}{\varepsilon} + (E_2 - E_3) + \frac{x_{b2}c_1}{c_2} \right] (U_{b2} - U_{b1}) \end{cases} \quad (3.22)$$

Nous pouvons noter que tous les termes des deux développements extérieur et intérieur sont sans dimension, bien évidemment pour un problème adimensionné.

3.1.3. Formulation de la X-FEM

Dans cette section, nous considérons la formulation de la X-FEM pour le modèle adimensionnel représenté sur la Figure 3.2 avec les conditions aux limites données par (3.5).

Comme toutes les épaisseurs du modèle sont sans dimension, les conditions aux limites concernant le déplacement doivent être aussi normalisées par la longueur de référence L :

$$\begin{cases} u(x = x_{b1}) = 0 \\ u(x = x_{b2}) = \tilde{U}^d = \frac{U^d}{L} \end{cases} \quad (3.23)$$

La construction des éléments finis étendus étant identique à celle des éléments finis classiques, il s'agit de commencer en partitionnant le domaine Ω en l'ensemble des Nel éléments. Ces éléments sont connectés par Nn nœuds qui se situent aux sommets de chaque élément. Les coordonnées des nœuds sont désignées par x_1, x_2, \dots, x_{Nn} tandis que les éléments du domaine sont nommés par e_1, e_2, \dots, e_{Nel} . Pour le cas unidimensionnel des éléments finis linéaires ($L2$), la relation entre le nombre d'éléments et le nombre de nœuds est donnée par:

$$Nel = Nn - 1 \quad (3.24)$$

Associée à chaque nœud i , une fonction de forme classique N_i , la fonction de "chapeau" par exemple, est définie sur son support ω_i étant l'ensemble des éléments connectés au nœud i (Figure 3.5).

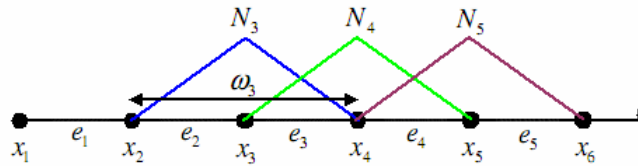


Figure 3.5: Fonctions de forme du maillage unidimensionnel des éléments finis

Jusqu'à ici, nous n'avons pas encore abordé la présence du joint brasé Ω^2 dans le domaine Ω . Le maillage des éléments finis est construit de façon *classique* ou *standard* sans prise en compte du joint brasé, autrement dit, le maillage est indépendant du joint. Cependant, pour simplifier le

cas étudié et ainsi bien montrer l'intérêt de la X-FEM, nous supposons que le joint se trouve au milieu d'un élément du maillage (cf. Figure 3.6).

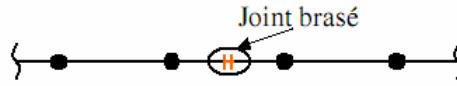


Figure 3.6: Positionnement du joint brasé au milieu d'un élément

En appliquant la X-FEM, la présence du joint dans le domaine de tout l'assemblage brasé est capturée par des fonctions spéciales appelées *fonctions enrichies*. Les fonctions enrichies sont incorporées aux nœuds qui se trouvent *au voisinage* du joint brasé — les nœuds enrichis. Comme nous ne connaissons pas la frontière exacte de la région d'influence du joint brasé sur le domaine global, au lieu d'enrichir les deux nœuds les plus proches du joint, on définit un domaine enrichi plus large.

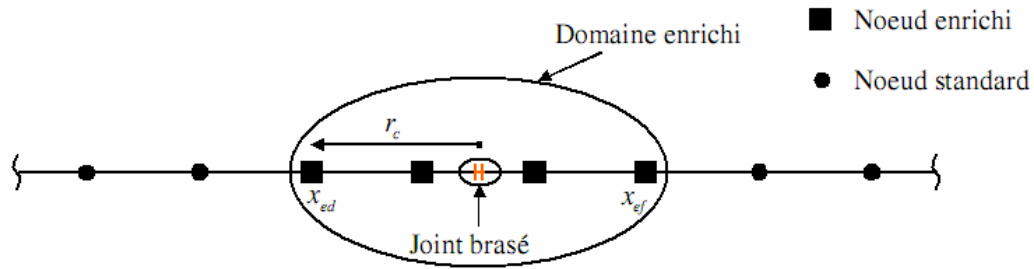


Figure 3.7: Domaine enrichi autour du joint brasé

Sur la Figure 3.7, nous définissons une distance r_c de la position du joint. Le domaine enrichi est alors déterminé par le segment $[x_{ed}, x_{ef}]$ où x_{ed} et x_{ef} repèrent les positions de deux nœuds du domaine maillé. Tous les nœuds qui se trouvent dans le segment $[x_{ed}, x_{ef}]$ y compris les deux extrémités x_{ed} et x_{ef} sont enrichis. En faisant varier la valeur de r_c , nous déterminerons la distance optimale pour l'enrichissement.

L'approximation du déplacement du modèle de l'assemblage brasé par la X-FEM est donnée par:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(x) u_i + \sum_{j=1}^{N_{enr}} N_j(x) \psi_m(x) a_j \quad (3.25)$$

où N_{enr} est le nombre de noeuds enrichis, u_i désignent les déplacements nodaux et a_j sont les paramètres d'enrichissement.

Notons que dans (3.25), $\psi_m(x)$ désignent les fonctions enrichies qui sont intégrées dans l'approximation afin de tenir en compte de l'influence du joint brasé. Nous exploitons les solutions de la méthode des DAR pour construire la partie enrichie de la X-FEM. Nous proposons deux méthodes différentes du couplage DAR-X-FEM:

- La première méthode consiste à construire les fonctions enrichies $\psi_m(x)$ à partir des solutions des DAR sans condition imposée sur les paramètres d'enrichissement a_j .
- La deuxième méthode est d'utiliser les fonctions enrichies classiques — fonctions de type Heaviside — en imposant la condition sur les paramètres d'enrichissement a_j .

Les détails relatifs aux deux méthodes sont présentés dans les sections suivantes.

3.1.4. Couplage DAR-X-FEM – Méthode relative aux fonctions enrichies

3.1.4.1. Principe du couplage

Le choix des fonctions enrichies $\psi_m(x)$ dans l'approximation (3.25) joue un rôle essentiel dans la X-FEM. Pour tous les types de problèmes singuliers, les fonctions enrichies sont choisies de façon à ce que le comportement de tout le domaine, en tenant compte de la singularité, soit approché le plus exactement possible. C'est pourquoi, il est préférable de connaître *a priori* les informations sur le comportement du domaine contenant la singularité. Pour notre cas d'étude de l'assemblage brasé, nous proposons d'utiliser les solutions asymptotiques approchées obtenues par la méthode des DAR afin de construire les fonctions enrichies de la X-FEM.

Revenons au développement extérieur des DAR, nous distinguons deux parties: u^0 étant la partie non-perturbée, *i.e.* la solution du problème posé sur le domaine "sain" sans joint brasé, et une partie de correction ϵu^1 tenant compte de la perturbation provoquée par le joint.

$$u^\epsilon(x) = \underbrace{u^0(x)}_{\text{Partie non-perturbée}} + \underbrace{\epsilon u^1(x)}_{\text{Partie de correction}} \quad (3.26)$$

De façon identique, l'approximation du déplacement définie par la X-FEM est aussi composée par deux parties: l'une, u^{FEM} , désigne le déplacement standard du domaine en absence de joint brasé, l'autre, u^{enr} , est ajoutée pour prendre en compte l'influence du joint.

$$u^h(x) = \underbrace{\sum_{i=1}^{Nn} N_i(x)u_i}_{u^{FEM}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{Nenr} N_j(x)\psi(x)a_j}_{u^{enr}} \quad (3.27)$$

En comparant les approximations (3.26) et (3.27) données par DAR et X-FEM, nous sommes amenés à faire les deux remarques suivantes concernant le parallèle entre les différents termes intervenant dans les deux méthodes (cf. Figure 3.8):

- Le terme non-perturbé u^0 donné par la méthode des DAR joue un rôle similaire à la partie classique u^{FEM} de la X-FEM.
- Le terme de perturbation εu^1 des DAR est "équivalent" à la partie enrichie u^{enr} de la X-FEM dans la mesure où il contient l'information d'enrichissement liée à la présence du joint.

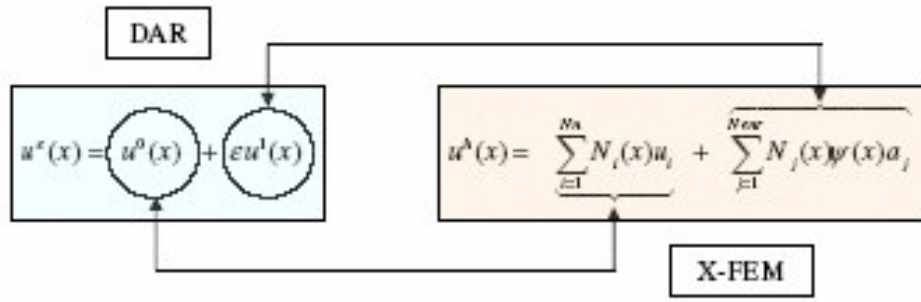


Figure 3.8: Parallèle entre les termes de DAR et de X-FEM

Ces deux remarques nous inspirent l'idée nouvelle et originale de coupler les deux méthodes DAR et X-FEM pour modéliser l'assemblage brasé. Concrètement, les fonctions enrichies de la X-FEM peuvent être construites en se basant sur les termes de perturbation de DAR. Nous présentons un schéma de principe du couplage DAR-X-FEM pour le cas unidimensionnel de l'assemblage brasé sur la Figure 3.9. Après avoir maillé le modèle de l'assemblage par des nœuds régulièrement espacés, nous définissons le domaine enrichi autour du joint brasé. En faisant des zooms tout d'abord sur ce domaine enrichi puis sur le joint brasé, nous pouvons facilement distinguer le domaine de validité pour chaque type de fonction enrichie. La construction des fonctions enrichies de X-FEM en exploitant les solutions de DAR comprend les étapes essentielles suivantes:

- Extraction des termes de perturbation extérieurs (εu_{\mp}^1) et intérieurs ($\varepsilon v_{\Omega_{\mp}^2}^1$) à partir des solutions de la méthode des DAR.
- Construction des fonctions enrichies de la X-FEM en s'appuyant sur ces termes de DAR et en appliquant des variantes différentes de la stratégie d'enrichissement qui sont présentées dans la section suivante.

Suivant la variante choisie, le nombre de types de fonctions et le support de chaque type peuvent varier. Mais en général, nous distinguons trois types de fonctions enrichies: extérieure, intérieure et de transition. Chaque type de fonction est lui-même divisé en deux parties suivant la position de son support par rapport au joint brasé: à gauche ou à droite. Les fonctions extérieures $\psi_{ext}^g, \psi_{ext}^d$ sont préférables dans le domaine enrichi mais à l'extérieur de l'élément contenant le joint. Deux fonctions enrichies intérieures $\psi_{int}^g, \psi_{int}^d$ sont utilisées dans le domaine limité par la géométrie du joint (Ω^2). Dans le reste de l'élément contenant le joint, afin de relier les fonctions extérieures et intérieures, un type de fonction de transition ($\psi_{trans}^g, \psi_{trans}^d$) peut être construit.

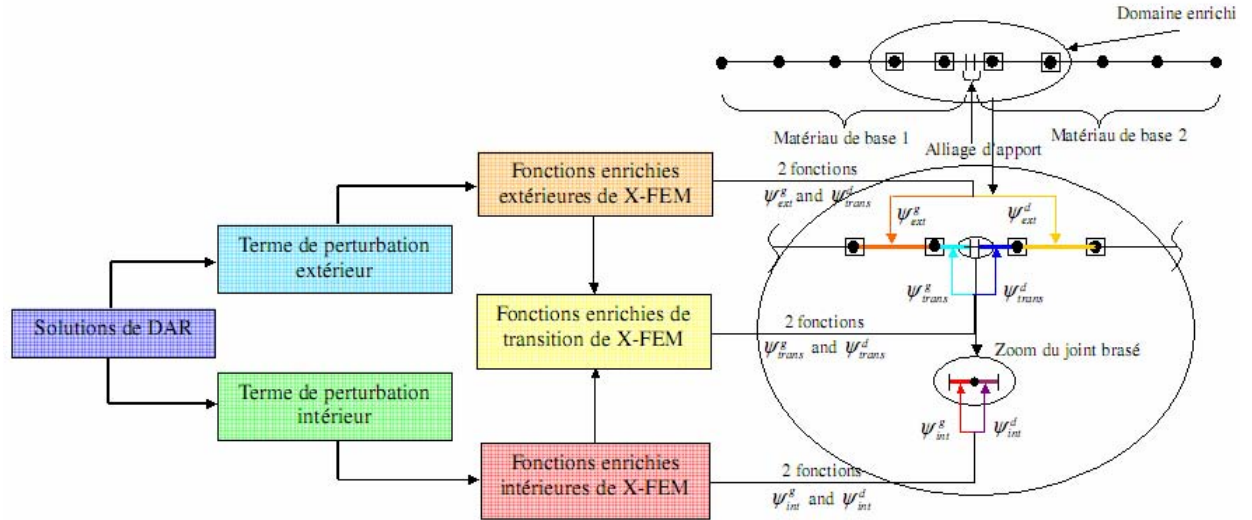


Figure 3.9: Principe du couplage DAR-X-FEM – Méthode relative aux fonctions enrichies

3.1.4.2. Différentes variantes d'enrichissement

A cause de la difficulté à déterminer explicitement des fonctions enrichies optimales, nous proposons ici un certain nombre de variantes pour la stratégie d'enrichissement. Afin de

comparer les variantes et choisir la meilleure, il nous faut une solution de référence. Dans ce cas, la solution de référence peut être obtenue à l'aide d'un modèle analytique.

3.1.4.2.1. Modèle analytique

Le calcul analytique est mis en œuvre pour le modèle adimensionnel présenté sur la Figure 3.10 avec les conditions aux limites normalisées par (3.23).

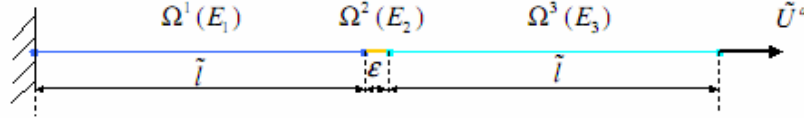


Figure 3.10: Modèle pour le calcul analytique

Un modèle équivalent à ce modèle, contenant trois ressorts R_1, R_2 et R_3 en série, est représenté sur la Figure 3.11.

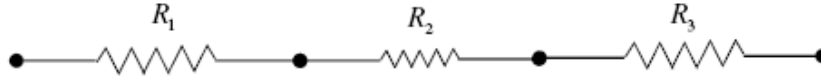


Figure 3.11: Modèle équivalent des ressorts

En notant U_1, U_2 et U_3 les déplacements des ressorts, le comportement de ce modèle peut être présenté par le système d'équations ci-dessous:

$$\begin{cases} E_1 \frac{U_1}{\tilde{l}} = E_2 \frac{U_2}{\tilde{\varepsilon}} = E_3 \frac{U_3}{\tilde{l}} = \sigma \\ U_1 + U_2 + U_3 = \tilde{U}^d \end{cases} \quad (3.28)$$

En tenant compte de la relation $2\tilde{l} + \tilde{\varepsilon} = 1$, la résolution de (3.28) nous donne la solution analytique du déplacement de chaque composant de l'assemblage brasé:

$$\begin{cases} U_1 = \frac{\tilde{U}^d}{1 + \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{E_1}{E_3}} \\ U_2 = \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} \cdot \frac{\tilde{U}^d}{1 + \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{E_1}{E_3}} \\ U_3 = \frac{E_1}{E_3} \cdot \frac{\tilde{U}^d}{1 + \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{2\varepsilon}{1-\varepsilon} + \frac{E_1}{E_3}} \end{cases} \quad (3.29)$$

A partir de ces valeurs, nous calculons le champ de déplacement analytique u_{ana} linéaire dans chaque sous-domaine:

$$u_{ana} = \begin{cases} \frac{U_1}{\tilde{l}} x - \frac{U_1 x_{b1}}{\tilde{l}} & \text{dans } \Omega^1 \\ \frac{U_2}{\varepsilon} x + U_1 - \frac{U_2 x_{jb1}}{\varepsilon} & \text{dans } \Omega^2 \\ \frac{U_3}{\tilde{l}} x + U_1 + U_2 - \frac{U_3 x_{jb2}}{\tilde{l}} & \text{dans } \Omega^3 \end{cases} \quad (3.30)$$

où x_{jb1} et x_{jb2} sont les coordonnées de deux extrémités du joint brasé.

Dans les sections suivantes, nous présentons différentes variantes d'enrichissement ainsi que leur comparaison avec la solution du modèle analytique.

3.1.4.2.2. Première variante

Un choix naturel et simple est d'utiliser seulement les termes extérieurs de la perturbation de la méthode des DAR pour construire les fonctions enrichies extérieures de la X-FEM. Etant valables pour les éléments enrichis excepté l'élément contenant le joint, deux fonctions enrichies $\psi_{ext}^g, \psi_{ext}^d$ sont respectivement "activées" à gauche et à droite par rapport au joint. Rappelons que deux noeuds x_{ed} et x_{ef} limitent le domaine enrichi. A l'extérieur de ce domaine, on impose que les fonctions $\psi_{ext}^g, \psi_{ext}^d$ soient nulles. La première idée pour ces deux fonctions consiste à retenir la même pente que les parties perturbées des DAR. A cause de la linéarité des termes εu_{\mp}^1 , les fonctions enrichies $\psi_{ext}^g, \psi_{ext}^d$ sont aussi choisies linéaires:

$$\begin{cases} \varepsilon u_-^1 = \varepsilon \frac{c_1 E_3 (U_{b2} - U_{b1})}{2E_2 c_2^2} (x_{b1} - x) \\ \varepsilon u_+^1 = \varepsilon \frac{c_1 E_1 (U_{b2} - U_{b1})}{2E_2 c_2^2} (x_{b2} - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_{ext}^g = \varepsilon \frac{c_1 E_3 (U_{b2} - U_{b1})}{2E_2 c_2^2} (x_{ed} - x) \\ \psi_{ext}^d = \varepsilon \frac{c_1 E_1 (U_{b2} - U_{b1})}{2E_2 c_2^2} (x_{ef} - x) \end{cases} \quad (3.31)$$

En appliquant les conditions aux limites données par (3.23), nous réécrivons (3.31):

$$\begin{cases} \varepsilon u_-^1 = \varepsilon \frac{c_1 E_3 \tilde{U}^d}{2E_2 c_2^2} (x_{b1} - x) \\ \varepsilon u_+^1 = \varepsilon \frac{c_1 E_1 \tilde{U}^d}{2E_2 c_2^2} (x_{b2} - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_{ext}^g = \varepsilon \frac{c_1 E_3 \tilde{U}^d}{2E_2 c_2^2} (x_{ed} - x) \\ \psi_{ext}^d = \varepsilon \frac{c_1 E_1 \tilde{U}^d}{2E_2 c_2^2} (x_{ef} - x) \end{cases} \quad (3.32)$$

En désignant x_{j1} et x_{j2} les deux noeuds du maillage les plus proches du joint, autrement dit, l'élément $[x_{j1}, x_{j2}]$ contenant le joint, nous faisons l'interpolation des deux fonctions extérieures $\psi_{ext}^g, \psi_{ext}^d$ afin d'obtenir une fonction de transition ψ_{trans} appliquée dans cet élément. La fonction ψ_{trans} elle-même est linéaire et satisfait aux conditions suivantes:

$$\begin{cases} \psi_{trans}(x = x_{j1}) = \psi_{ext}^g(x = x_{j1}) \\ \psi_{trans}(x = x_{j2}) = \psi_{ext}^d(x = x_{j2}) \end{cases} \quad (3.33)$$

ce qui donne:

$$\psi_{trans} = \frac{\varepsilon c_1 \tilde{U}^d}{2E_2 c_2^2} \left\{ \left[E_1(x_{ef} - x_{j2}) - E_3(x_{ed} - x_{j1}) \right] x - \left[E_3(x_{ed} - x_{j1})x_{j2} - E_1(x_{ef} - x_{j2}) \right] \right\} \quad (3.34)$$

La représentation de trois fonctions enrichies $\psi_{ext}^g, \psi_{ext}^d$ et ψ_{trans} est illustrée sur la Figure 3.12.

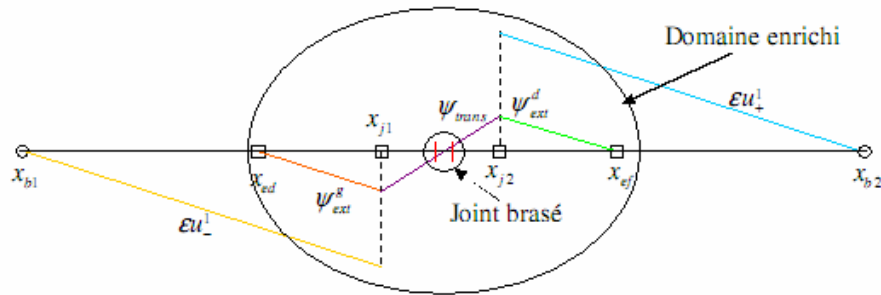


Figure 3.12: Première variante de la stratégie d'enrichissement

En appliquant cette variante d'enrichissement, nous considérons le problème du modèle présenté sur la Figure 3.10 avec des données différentes suivant les deux configurations. Les valeurs des modules d'Young sont extraites des travaux de (Nafi, 2005) pour l'assemblage brasé dont le

matériau de base est l'acier à outils de la nuance 40CMD8 et l'alliage d'apport CuSil à base d'Ag-Cu.

- Première configuration

Les deux matériaux de base possèdent des modules d'Young identiques, *i.e.* l'assemblage est symétrique au niveau de la géométrie et de la rigidité. Les données de longueur du modèle réel sont normalisées pour obtenir les grandeurs sans dimension suivantes:

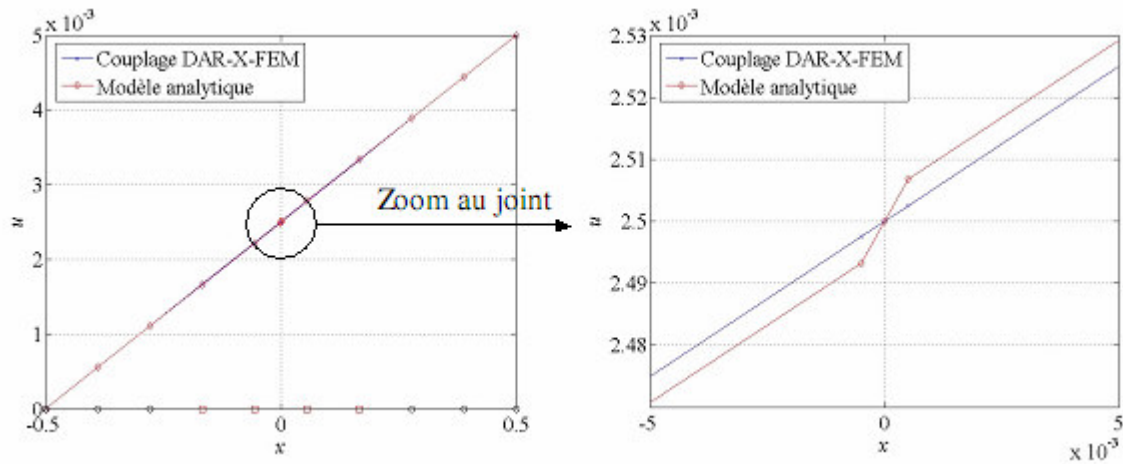
$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 200(GPa) \\ E_2 = 74(GPa) \\ E_3 = 200(GPa) \\ L = 100(mm) \\ e_j = 0.1(mm) \\ U^d = 0.5(mm) \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} E_1 = 200(GPa) \\ E_2 = 74(GPa) \\ E_3 = 200(GPa) \\ \tilde{L} = 1 \\ \varepsilon = 10e-4 \\ \tilde{U}^d = 0.005 \end{array} \right. \quad (3.35)$$

- Deuxième configuration

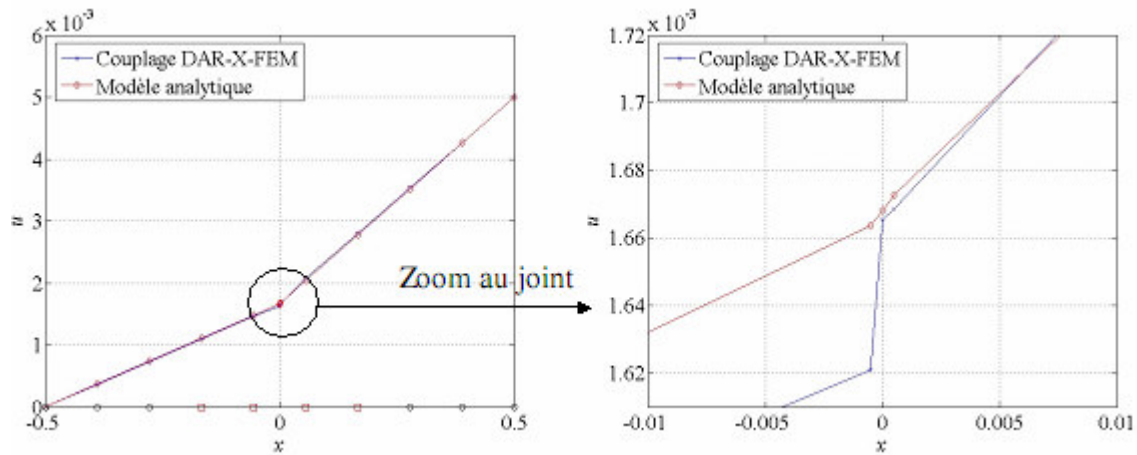
L'assemblage est symétrique de géométrie mais dissymétrique sur la rigidité car les modules d'Young des deux matériaux de base sont différents.

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1 = 200(GPa) \\ E_2 = 74(GPa) \\ E_3 = 100(GPa) \\ \tilde{L} = 1 \\ \varepsilon = 10e-4 \\ \tilde{U}^d = 0.005 \end{array} \right. \quad (3.36)$$

Le maillage initial contient $Nelem = 9$ (éléments) et $Nn = 10$ (nœuds), uniformément espacés dans le domaine $\Omega = [x_{b1}, x_{b2}]$. Nous considérons une valeur initiale de la distance critique $r_c = 0.25$ qui définit le domaine enrichi $[x_{ed}, x_{ef}]$. La solution du déplacement, présentée pour tout le domaine ainsi qu'avec un zoom sur le joint brasé est obtenue par le couplage DAR-X-FEM. Elle est comparée avec celle du modèle analytique sur la Figure 3.13.



(a) Assemblage symétrique



(b) Assemblage dissymétrique

Figure 3.13: Comparaison des solutions du couplage DAR-X-FEM (1^{ère} variante d'enrichissement) et du modèle analytique

Pour le cas de l'assemblage symétrique, la solution du couplage DAR-X-FEM n'est pas très différente de celle du modèle analytique. Cependant, le changement de la pente du déplacement dans le joint brasé n'est pas rendu par les fonctions enrichies proposées dans cette variante. Pour le cas de l'assemblage dissymétrique, nous pouvons constater un écart plus net entre les deux modèles de calcul, notamment autour et à l'intérieur du joint.

Afin d'évaluer la précision des solutions du couplage DAR-X-FEM, nous allons estimer la norme L^2 de l'erreur et l'erreur maximale entre le couplage et le modèle analytique:

$$\|err\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{Nc} (u_{ana}^i - u_{cpl}^i)^2} \quad (3.37)$$

$$err_{\max} = \max_{i=1 \text{ à } Nc} \{ |u_{ana}^i - u_{cpl}^i| \} \quad (3.38)$$

où Nc est le nombre de points calculés, u_{ana}^i et u_{cpl}^i sont les déplacements calculés au point i à l'aide du modèle analytique et du couplage DAR-X-FEM, respectivement.

Nous considérons trois discrétisations des éléments finis et trois valeurs de la distance critique r_c .

Pour chaque discrétisation, le paramètre du maillage h est calculé par:

$$h = \frac{1}{Nn - 1} \quad (3.39)$$

Les erreurs de la première variante d'enrichissement sont résumées pour les deux configurations d'assemblage: symétrique et dissymétrique (Tableau 3.1).

r_c	Nn	$Nenr$	h	Symétrique		Dissymétrique	
				$\ err\ $	err_{\max}	$\ err\ $	err_{\max}
0.15	10	2	0.1111	0.0021	0.0013	0.0022	0.0015
	20	6	0.0526	1.225e -5	6.385e-5	4.092e -5	1.994e-5
	30	8	0.0345	9.463e -6	4.245e-5	2.972e -6	1.278e-5
0.25	10	4	0.1111	1.451e-5	8.913e-5	6.985e-5	4.279e-5
	20	10	0.0526	1.225e -5	6.385e-5	4.092e -5	1.994e-5
	30	14	0.0345	9.463e -6	4.245e-5	2.972e -6	1.278e-5
0.35	10	6	0.1111	1.451e-5	8.913e-5	6.985e-5	4.279e-5
	20	14	0.0526	1.225e -5	6.385e-5	4.092e -5	1.994e-5
	30	20	0.0345	9.463e -6	4.245e-5	2.972e -6	1.278e-5

Tableau 3.1: Erreurs d'approximation avec la 1^{ère} variante d'enrichissement

3.1.4.2.3. Deuxième variante

Les solutions extérieures sont valables à l'extérieur de la couche limite, bien évidemment en dehors du joint brasé. Pour l'intérieur du joint, les solutions intérieures approchent mieux le comportement exact. Nous essayons donc d'utiliser à la fois les solutions extérieures et intérieures des DAR pour construire les fonctions enrichies extérieures et intérieures de la X-

FEM. En se basant sur les termes extérieurs $\mathcal{E}u_{\mp}^1$, on construit les deux fonctions extérieures ψ_{ext}^g et ψ_{ext}^d appliquées aux éléments enrichis, sauf pour l'élément contenant le joint. Identiquement à la première variante, la pente des parties perturbées extérieures $\mathcal{E}u_{\mp}^1$ doit être conservée:

$$\begin{cases} \mathcal{E}u_-^1 = \varepsilon \frac{c_1 E_3 \tilde{U}^d}{2E_2 c_2^2} (x_{b1} - x) \\ \mathcal{E}u_+^1 = \varepsilon \frac{c_1 E_1 \tilde{U}^d}{2E_2 c_2^2} (x_{b2} - x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \psi_{ext}^g = \varepsilon \frac{c_1 E_3 \tilde{U}^d}{2E_2 c_2^2} (x_{ed} - x) \\ \psi_{ext}^d = \varepsilon \frac{c_1 E_1 \tilde{U}^d}{2E_2 c_2^2} (x_{ef} - x) \end{cases} \quad (3.40)$$

A l'intérieur du joint, les deux fonctions intérieures ψ_{int}^g et ψ_{int}^d qui sont respectivement activées pour les parties Ω_-^2 et Ω_+^2 , sont directement obtenues à partir des termes intérieures $\mathcal{E}v_{\mp}^1$ des DAR:

$$\begin{cases} \psi_{int}^g = \mathcal{E}v_{\Omega_-^2}^1 = \varepsilon \frac{E_3}{2E_2 c_2} \left[\frac{2E_1 x}{\varepsilon} + (E_1 - E_2) + \frac{x_{b1} c_1}{c_2} \right] \tilde{U}^d \\ \psi_{int}^d = \mathcal{E}v_{\Omega_+^2}^1 = \varepsilon \frac{E_1}{2E_2 c_2} \left[\frac{2E_3 x}{\varepsilon} + (E_2 - E_3) + \frac{x_{b2} c_1}{c_2} \right] \tilde{U}^d \end{cases} \quad (3.41)$$

Afin de relier les fonctions extérieures et intérieures, nous faisons l'interpolation par des fonctions de transition ψ_{trans}^g et ψ_{trans}^d (Figure 3.14). Comme les fonctions extérieures et intérieures sont linéaires, les deux fonctions ψ_{trans}^g et ψ_{trans}^d sont aussi linéaires.

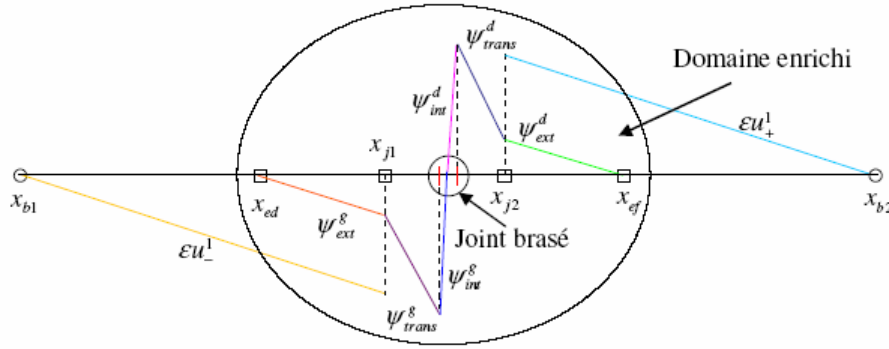


Figure 3.14: Deuxième variante d'enrichissement

L'interpolation est effectuée à l'aide des conditions aux deux noeuds x_{j1}, x_{j2} et aux deux extrémités x_{jb1}, x_{jb2} du joint:

$$\begin{cases} \psi_{trans}^g(x = x_{j1}) = \psi_{ext}^g(x = x_{j1}) \\ \psi_{trans}^g(x = x_{jb1}) = \psi_{int}^g(x = x_{jb1}) \end{cases} \quad (3.42)$$

et

$$\begin{cases} \psi_{trans}^d(x = x_{jb2}) = \psi_{int}^d(x = x_{jb2}) \\ \psi_{trans}^d(x = x_{j2}) = \psi_{ext}^d(x = x_{j2}) \end{cases} \quad (3.43)$$

ce qui donnent:

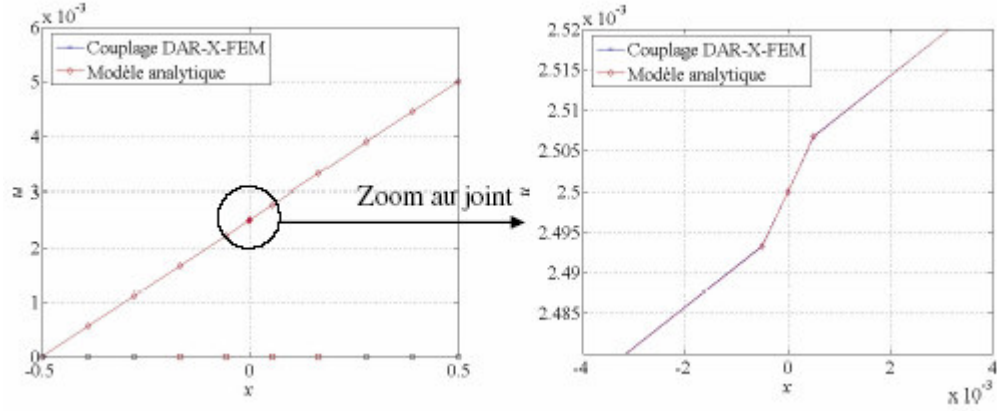
$$\begin{cases} \psi_{trans}^g = \frac{\psi_{int}^g(x_{jb1}) - \psi_{ext}^g(x_{j1})}{x_{jb1} - x_{j1}}(x - x_{j1}) + \psi_{ext}^g(x_{j1}) \\ \psi_{trans}^d = \frac{\psi_{ext}^d(x_{j2}) - \psi_{int}^d(x_{jb2})}{x_{j2} - x_{jb2}}(x - x_{jb2}) + \psi_{int}^d(x_{jb2}) \end{cases} \quad (3.44)$$

En appliquant cette variante d'enrichissement, le déplacement obtenu par le couplage DAR-X-FEM, pour les deux cas symétrique et dissymétrique des assemblages brasés, est comparé avec le résultat du modèle analytique (Figure 3.15). Cette fois-ci non seulement le comportement à l'extérieur du joint est bien reproduit, mais le changement de pente dans le joint est aussi beaucoup plus précis. Elle est parfaitement reproduite pour le joint symétrique et l'est un peu moins bien dans le cas dissymétrique.

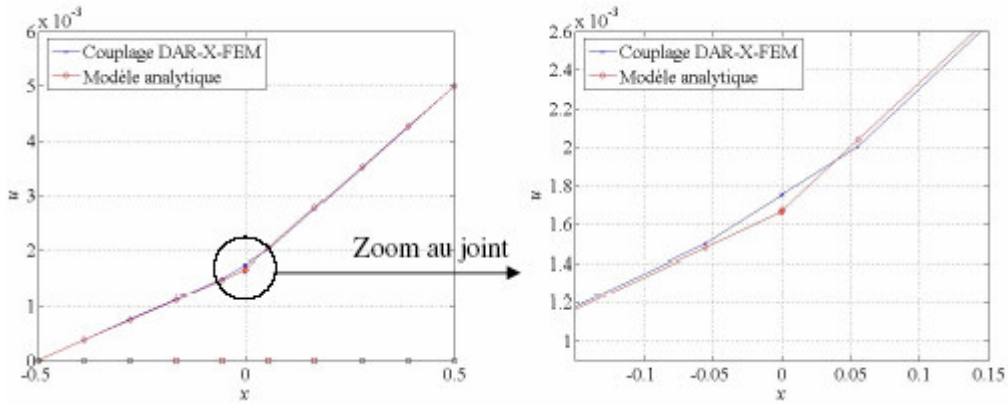
r_c	Nn	$Nenr$	h	Symétrique		Dissymétrique	
				$\ err\ $	err_{max}	$\ err\ $	err_{max}
0.15	10	2	0.1111	1.771e-7	7.333e-8	1.546e-4	8.342e-5
	20	6	0.0526	1.062e-7	5.004e-8	7.799e-5	3.933e-5
	30	8	0.0345	5.834e-8	3.274e-8	5.420e-5	2.576e-5
0.25	10	4	0.1111	1.312e-7	5.433e-8	1.547e-4	8.341e-5
	20	10	0.0526	7.753e-8	3.652e-8	7.786e-5	3.923e-5
	30	14	0.0345	4.350e-8	2.441e-8	5.402e-5	2.568e-5
0.35	10	6	0.1111	9.158e-8	3.792e-8	1.546e-4	8.328e-5
	20	14	0.0526	5.307e-8	2.500e-8	7.753e-5	3.910e-5
	30	20	0.0345	3.076e-8	1.726e-8	5.364e-5	2.550e-5

Tableau 3.2: Erreurs d'approximation avec la 2^{ème} variante d'enrichissement

La norme L^2 de l'erreur et l'erreur maximale de cette variante pour trois valeurs de r_c et pour trois discrétisations du maillage sont présentées dans le Tableau 3.2 et reflètent les observations de la Figure 3.15.



(a) Assemblage symétrique



(b) Assemblage dissymétrique

Figure 3.15: Déplacement obtenu par la 2^{ème} variante d'enrichissement

3.1.4.2.4. Troisième variante

Nous nous basons toujours sur les termes extérieurs $\mathcal{E}u_{\mp}^1$ pour construire les fonctions extérieures de la X-FEM. Cependant, au lieu de conserver les pentes, on retient les valeurs de $\mathcal{E}u_{\mp}^1$ aux deux nœuds les plus proches du joint x_{j1}, x_{j2} . D'autre part, les fonctions ψ_{ext}^g et ψ_{ext}^d s'annulent respectivement aux extrémités x_{ed} et x_{ef} du domaine enrichi.

Pour identifier chaque fonction extérieure linéaire, deux conditions sont données par:

$$\begin{cases} \psi_{ext}^g(x_{ed}) = 0 \\ \psi_{ext}^g(x_{j1}) = \varepsilon u_-^1(x_{j1}) \end{cases} \quad (3.45)$$

et

$$\begin{cases} \psi_{ext}^d(x_{j2}) = \varepsilon u_+^1(x_{j2}) \\ \psi_{ext}^d(x_{ef}) = 0 \end{cases} \quad (3.46)$$

La résolution de (3.45) et (3.46) nous donne deux fonctions extérieures:

$$\begin{cases} \psi_{ext}^g = \varepsilon \frac{c_1 E_3 \tilde{U}^d (x_{b1} - x_{j1})}{2 E_2 c_2^2 (x_{j1} - x_{ed})} (x - x_{ed}) \\ \psi_{ext}^d = \varepsilon \frac{c_1 E_1 \tilde{U}^d (x_{b2} - x_{j2})}{2 E_2 c_2^2 (x_{j2} - x_{ef})} (x - x_{ef}) \end{cases} \quad (3.47)$$

Dans les sous-domaines Ω_{\mp}^2 occupés par le joint, les fonctions intérieures sont égales aux termes intérieurs de correction $\varepsilon v_{\Omega_-^2}^1, \varepsilon v_{\Omega_+^2}^1$:

$$\begin{cases} \psi_{int}^g = \varepsilon v_{\Omega_-^2}^1 = \varepsilon \frac{E_3}{2 E_2 c_2} \left[\frac{2 E_1 x}{\varepsilon} + (E_1 - E_2) + \frac{x_{b1} c_1}{c_2} \right] \tilde{U}^d \\ \psi_{int}^d = \varepsilon v_{\Omega_+^2}^1 = \varepsilon \frac{E_1}{2 E_2 c_2} \left[\frac{2 E_3 x}{\varepsilon} + (E_2 - E_3) + \frac{x_{b2} c_1}{c_2} \right] \tilde{U}^d \end{cases} \quad (3.48)$$

Tout comme pour la deuxième variante, les fonctions de transition ψ_{trans}^g et ψ_{trans}^d sont interpolées à partir des fonctions extérieures et intérieures (Figure 3.16).

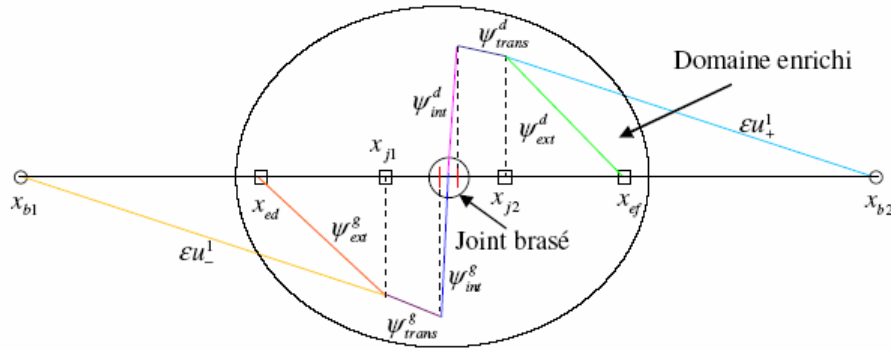
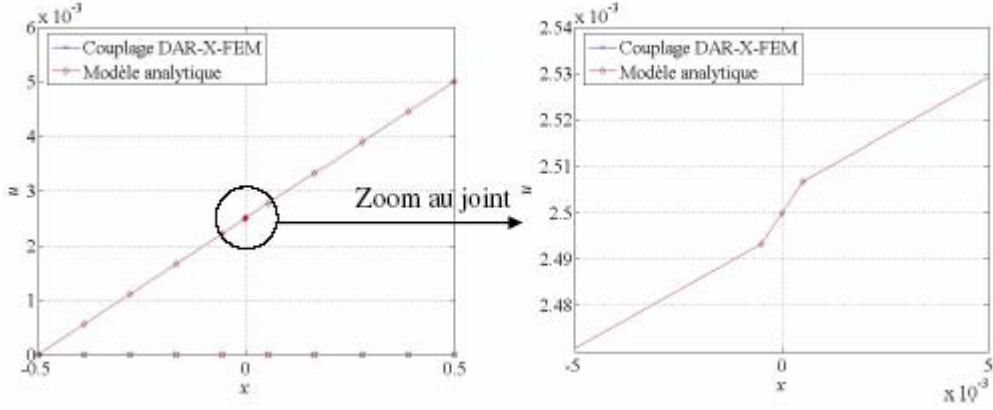
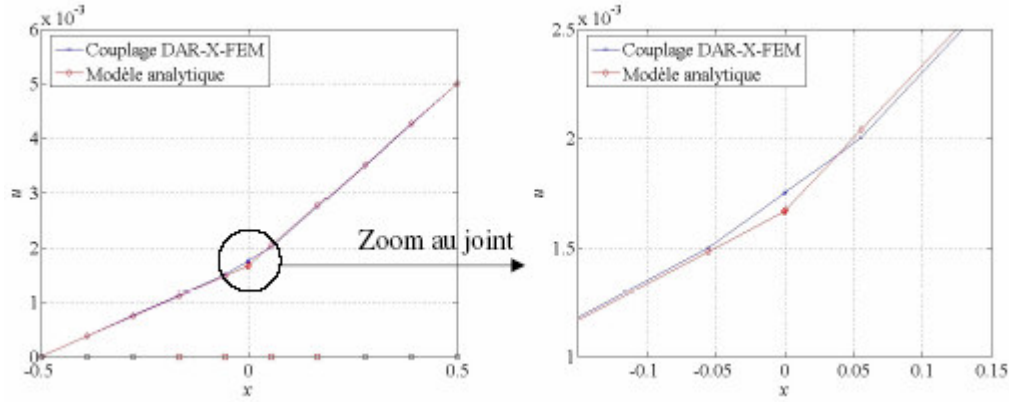


Figure 3.16: Troisième variante d'enrichissement

La Figure 3.17 illustre la comparaison des déplacements obtenus par la troisième variante du couplage DAR-X-FEM et par le modèle analytique. Les observations sont similaires à la deuxième variante.



(a) Assemblage symétrique



(b) Assemblage dissymétrique

Figure 3.17: Résultats de la 3^{ème} variante d'enrichissement

La convergence des résultats est examinée à travers trois discrétisations différentes du maillage. En même temps, nous essayons d'examiner la dépendance des résultats à l'ampleur du domaine enrichi en variant la valeur de r_c (Tableau 3.3). Les performances sont légèrement moins bonnes que la deuxième variante.

r_c	Nn	$Nenr$	h	Symétrique		Dissymétrique	
				$\ err\ $	err_{\max}	$\ err\ $	err_{\max}
0.15	10	2	0.1111	1.166e-5	7.490e-6	1.531e-4	8.546e-5
	20	6	0.0526	2.481e-8	1.169e-8	7.664e-5	3.916e-5
	30	8	0.0345	1.176e-8	6.598e-9	5.256e-5	2.556e-5
0.25	10	4	0.1111	4.066e-8	1.684e-8	1.538e-4	8.331e-5
	20	10	0.0526	2.481e-8	1.169e-8	7.664e-5	3.916e-5
	30	14	0.0345	1.176e-8	6.598e-9	5.256e-5	2.556e-5
0.35	10	6	0.1111	4.066e-8	1.684e-8	1.538e-4	8.331e-5
	20	14	0.0526	2.481e-8	1.169e-8	7.664e-5	3.916e-5
	30	20	0.0345	1.176e-8	6.598e-9	5.256e-5	2.556e-5

 Tableau 3.3: Erreurs d'approximation avec la 3^{ème} variante d'enrichissement

3.1.4.2.5. Quatrième variante

En retenant le même principe de construction des fonctions enrichies que pour la troisième variante, on ajoute un nœud appelé x_{j0} au milieu du joint (Figure 3.18). Bien évidemment ce nœud est enrichi par la fonction enrichie intérieure.

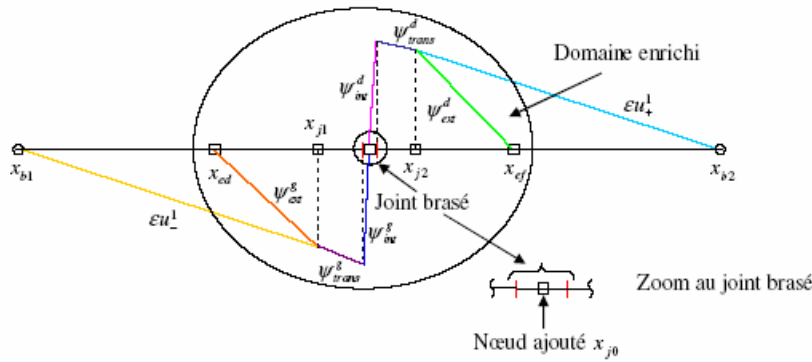
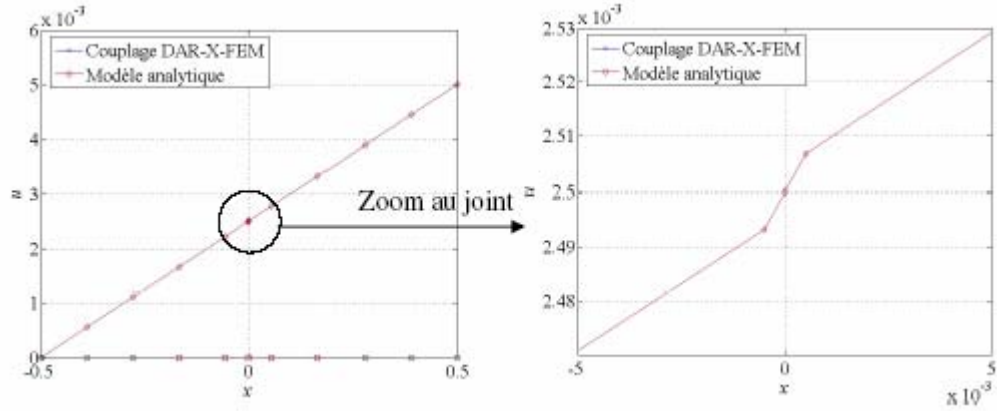


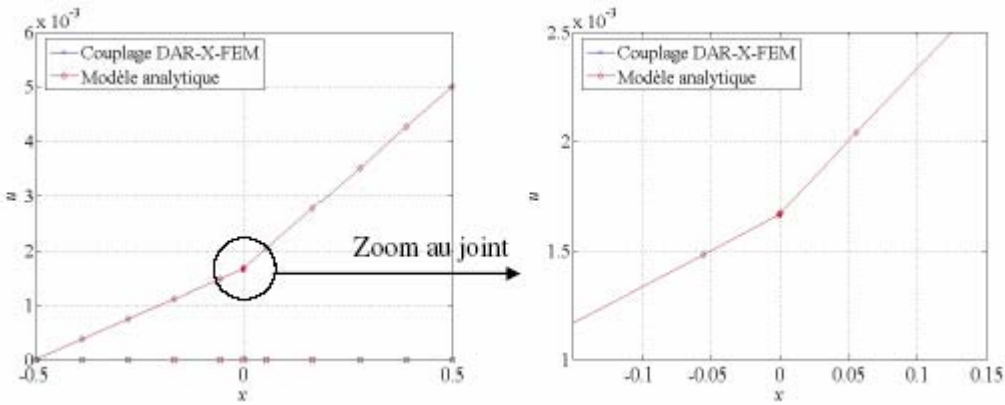
Figure 3.18: Quatrième variante d'enrichissement

Cette variante d'enrichissement nous donne une meilleure concordance entre le résultat du couplage DAR-X-FEM et la solution analytique, notamment pour le cas d'assemblage

dissymétrique (Figure 3.19). Cette fois-ci nous avons une concordance parfaite entre le couplage DAR-X-FEM et le calcul analytique, même pour le cas dissymétrique.



(a) Assemblage symétrique



(b) Assemblage dissymétrique

Figure 3.19: Résultats de la 4^{ème} variante d'enrichissement

Le Tableau 3.4 contient la norme L^2 de l'erreur et l'erreur maximale de la solution calculée par la quatrième variante d'enrichissement par rapport au résultat du modèle analytique. Comme pour les trois variantes précédentes, nous considérons la variation de résultats en fonction du paramètre de maillage et de la distance critique r_c . Les erreurs sont extrêmement faibles (de l'ordre de grandeur de l'arrondi numérique ou la troncature des chiffres dans l'approximation numérique dans les meilleurs cas). Cependant, le nombre des nœuds Nn a augmenté, de façon négligeable pour le cas unidimensionnel mais considérable pour les cas multidimensionnels.

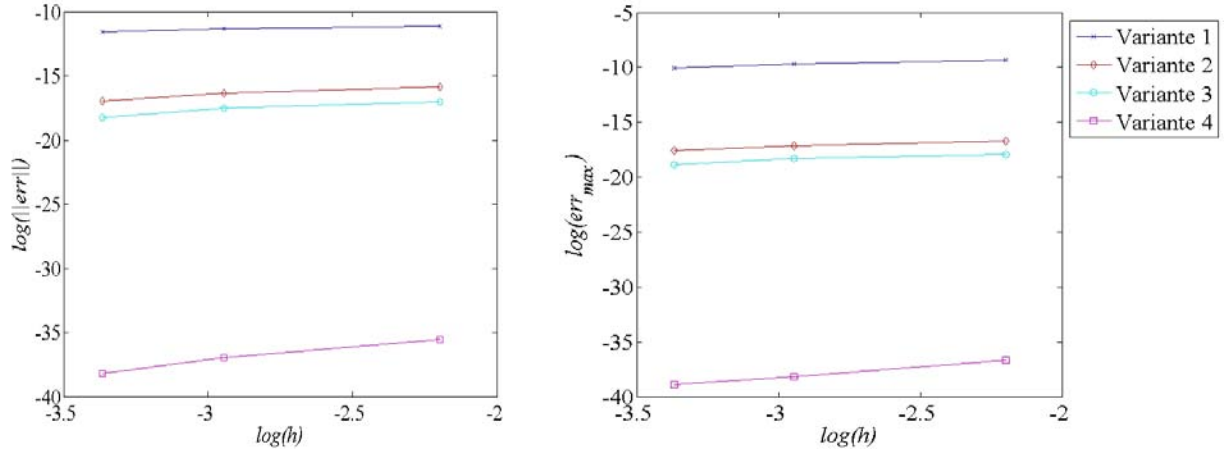
r_c	Nn	$Nenr$	h	Symétrique		Dissymétrique	
				$\ err\ $	err_{\max}	$\ err\ $	err_{\max}
0.15	11	3	0.1111	0.0013	7.490e-6	5.267e-4	3.636e-4
	21	7	0.0526	8.018e-17	3.426e-17	7.999e-7	4.090e-7
	31	9	0.0345	2.823e-17	1.913e-17	7.587e-7	4.023e-7
0.25	11	3	0.1111	3.664e-16	1.188e-16	8.368e-7	4.158e-7
	21	7	0.0526	8.761e-17	2.645e-17	7.999e-7	4.090e-7
	31	9	0.0345	2.523e-17	1.301e-17	7.587e-7	4.023e-7
0.35	11	3	0.1111	4.650e-16	1.362e-16	8.368e-7	4.158e-7
	21	7	0.0526	7.939e-17	2.602e-17	7.999e-7	4.090e-7
	31	9	0.0345	1.234e-17	6.072e-18	7.587e-7	4.023e-7

 Tableau 3.4: Erreurs d'approximation avec la 4^{ème} variante d'enrichissement

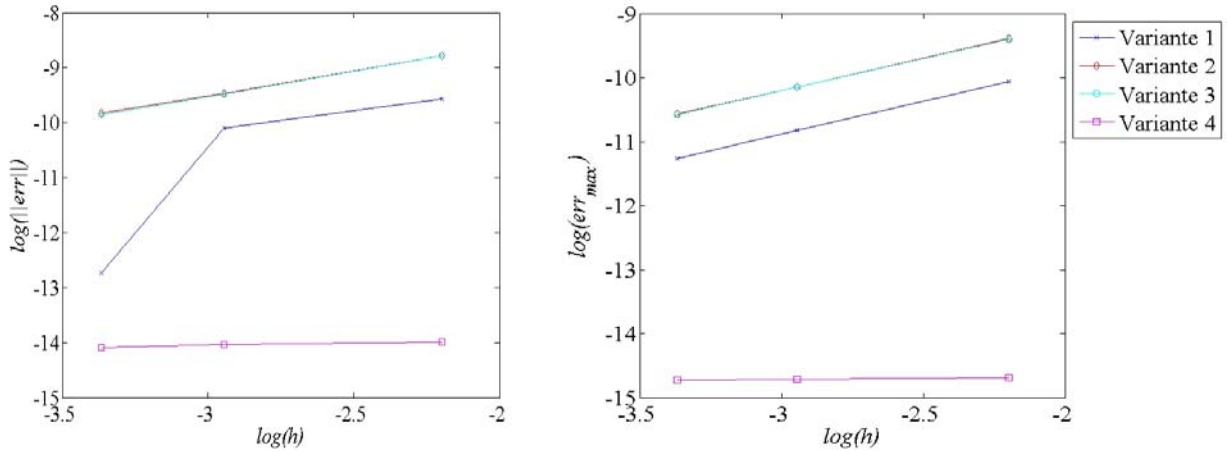
3.1.4.2.6. Comparaison des variantes d'enrichissement et remarques sur la méthode relatives aux fonctions enrichies

Pour les quatre variantes d'enrichissement de la méthode relatives aux fonctions enrichies, le résultat obtenu par le couplage DAR-X-FEM est "plus ou moins" concordant à celui du modèle analytique. C'est la quatrième variante qui présente la norme L^2 de l'erreur et l'erreur maximale les plus faibles (de l'ordre de $1e-17$ pour l'assemblage symétrique et de $1e-7$ pour le cas dissymétrique) (cf. Figure 3.20). Cependant, le taux de convergence est plus faible qu'attendu puisque l'exactitude des résultats est très proche de la précision de la machine.

L'ajout d'un nœud au milieu du joint, qui est relativement simple pour le cas unidimensionnel, contribue majoritairement à l'exactitude presque "*absolue*" de la quatrième variante. Cependant, pour les cas bidimensionnel ou tridimensionnel, l'addition de nœuds à un maillage uniforme peut compliquer considérablement le calcul des éléments finis.



(a) Assemblage symétrique



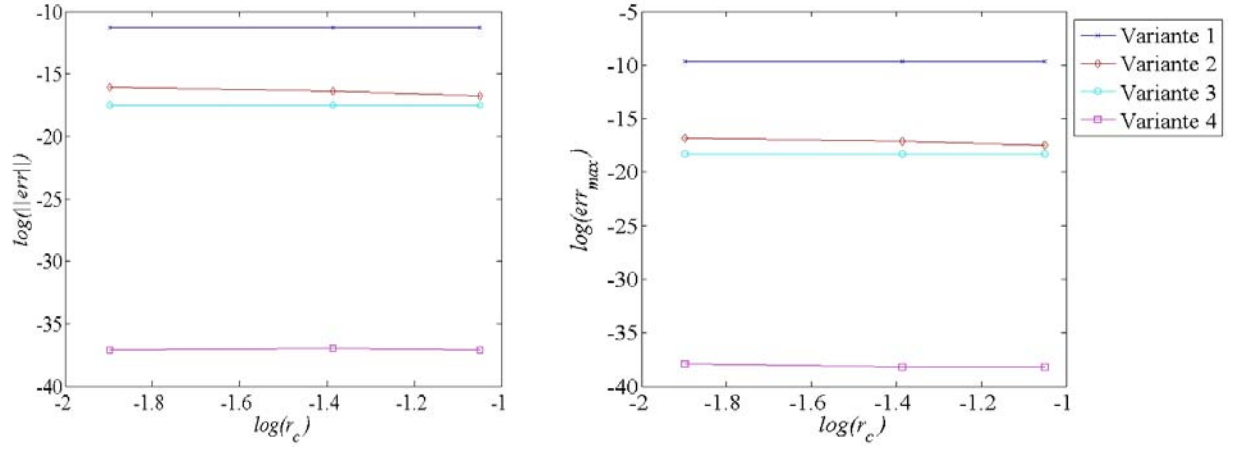
(b) Assemblage dissymétrique

Figure 3.20: Convergence au sens de la norme L^2 de l'erreur et de l'erreur maximale en fonction du paramètre du maillage h

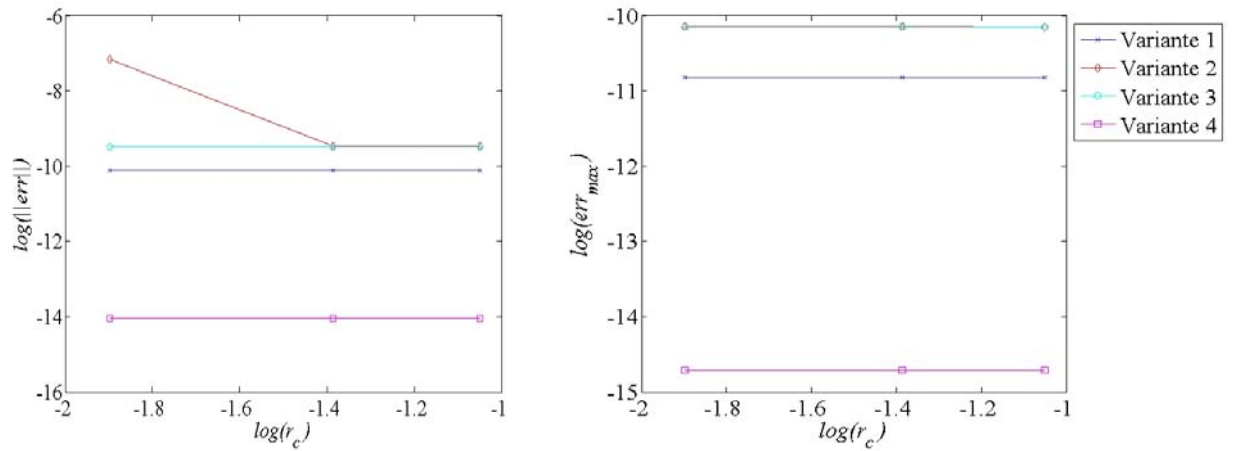
Si l'on modélise complètement l'assemblage brasé de trois couches — deux substrats et le joint — au lieu de n'exploiter que des termes extérieurs, il nous faut utiliser les termes intérieurs pour l'intérieur du joint. C'est la raison pour laquelle la première variante est moins précise que les autres variantes.

En harmonisant la précision des résultats et la simplicité du maillage uniforme, la troisième variante représente le meilleur compromis.

Pour la construction des fonctions enrichies externes à partir des termes extérieurs de la méthode des DAR, le résultat plus exact est obtenu pour la troisième variante dont les valeurs aux nœuds x_{j1}, x_{j2} sont conservées que pour la deuxième variante dont les pentes sont retenues.



(a) Assemblage symétrique



(b) Assemblage dissymétrique

Figure 3.21: Influence de la distance critique r_c sur les erreurs

La Figure 3.21 présente l'influence de la distance critique r_c , *i.e.* l'ampleur du domaine enrichi, sur les erreurs des résultats du couplage DAR-X-FEM. Pour la deuxième variante, plus les nœuds sont enrichis, plus le résultat est exact, notamment pour le cas dissymétrique. D'autre part, les erreurs du couplage sont indépendantes de la distance critique r_c si l'on applique une des trois autres variantes d'enrichissement. Cependant, afin de définir trois types de fonctions enrichies

(extérieure, intérieure et de transition), il faut enrichir au moins quatre nœuds. Nous pouvons exprimer cette condition par la relation entre la distance critique et le paramètre du maillage:

$$r_c \geq \frac{3}{2} h \quad (3.49)$$

Dans l'élément contenant le joint, il apparaît un "*mélange*" des propriétés mécaniques de trois matériaux composants, *i.e.* les trois modules d'Young E_1, E_2 et E_3 . Autrement dit, la pente de la courbe du déplacement dans cet élément est réglée de façon moyenne en se basant sur les valeurs des modules d'Young. Plus les trois modules d'Young sont différents, plus il est difficile de capturer la pente du déplacement dans l'élément contenant le joint. En conséquence, l'enrichissement du couplage DAR-X-FEM approche mieux la solution exacte pour le cas d'assemblage symétrique que pour le cas dissymétrique.

Enfin, la méthode relative aux fonctions enrichies du couplage DAR-X-FEM présente les inconvénients suivants:

- Il faut enrichir au moins quatre nœuds au voisinage du joint brasé pour le cas unidimensionnel. Pour les cas bidimensionnel ou tridimensionnel, il y a au moins quatre couches de nœuds qui doivent être enrichies. Un grand nombre de nœuds enrichis alourdit énormément le coût du calcul et il n'est pas garanti de gagner beaucoup par rapport à la FEM classique.
- Pour la construction des fonctions enrichies de la X-FEM, il faut déterminer les formes analytiques de tous les termes des DAR (extérieurs et intérieurs). Pour le cas unidimensionnel et un certain nombre de types de conditions aux limites, il est évident de trouver la forme analytique de chaque terme des DAR. Par contre, pour les cas multidimensionnels et des conditions aux limites arbitraires, les termes des DAR ne peuvent être déterminés que de façon numérique. La construction des fonctions enrichies à partir de ces termes devient alors extrêmement compliquée, voire impossible.

3.1.5. Couplage DAR-X-FEM – Méthode relative aux paramètres d'enrichissement

Les inconvénients de la méthode relative aux fonctions enrichies du couplage DAR-X-FEM montrent que nous ne pouvons pas l'appliquer pour les cas bidimensionnel ou tridimensionnel. Il faut proposer une autre méthode de couplage qui est plus robuste et plus facile à mettre en œuvre.

C'est la raison pour laquelle nous abordons la méthode relative aux paramètres d'enrichissement dans cette section.

3.1.5.1. Principe du couplage

Dans cette méthode, au lieu de construire les fonctions enrichies, nous profitons les fonctions enrichies classiques de type Heaviside pour les problèmes des fissures.

Nous considérons un modèle équivalent au domaine extérieur Ω^{ext} des DAR, *i.e.* deux substrats Ω^1 et Ω^3 sont collés directement par l'interface commune Γ^{13} . On imagine qu'il y a une fissure Γ_f qui se situe à l'interface Γ^{13} . Les conditions aux limites sont identiques au problème de la section précédente: l'encastrement à gauche et le déplacement imposé à droite (Figure 3.22).

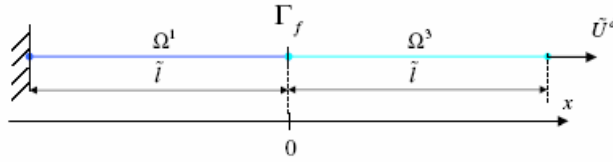


Figure 3.22: Problème équivalent d'une fissure

Pour prendre en compte la présence de la fissure dans la X-FEM, tous les auteurs, que nous pouvons citer (Moës *et al.*, 1999) et (Dolbow, 1999) par exemple, utilisent les fonctions de type Heaviside dont un choix pratique est la fonction signe (cf. Figure 3.23):

$$H(x) = \text{sign}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.50)$$

L'approximation de la X-FEM pour le problème de fissure, en utilisant la fonction de signe, est donnée par:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(x) u_i + \sum_{j=1}^{N_{enr}} N_j(x) H(x) a_j \quad (3.51)$$

Afin d'assurer l'interpolation du déplacement au nœud enrichi x_j , la fonction signe est souvent remplacée par la fonction signe modifiée comme justifié dans la section 2.2.2.2 du chapitre 2:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(x) u_i + \sum_{j=1}^{N_{enr}} N_j(x) (H(x) - H(x_j)) a_j \quad (3.52)$$

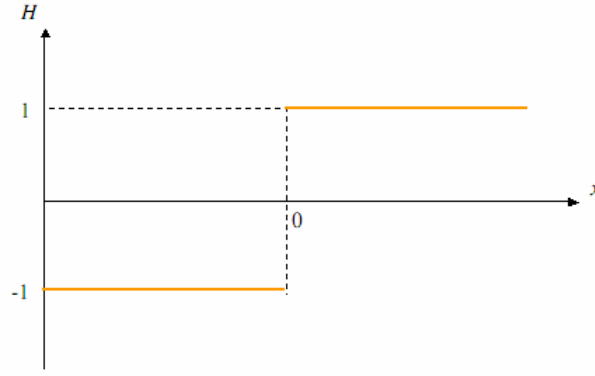


Figure 3.23: Fonction signe

Si l'on enrichit l'espace du déplacement par (3.52), le déplacement obtenu pour le problème de la fissure est présenté sur la Figure 3.24. Nous pouvons constater qu'il y a un saut du déplacement à la position de la fissure ($x = 0$) qui est reproduit par la discontinuité de la fonction signe. D'autre part, la fissure est une *forte* discontinuité, *i.e.* dans ce cas unidimensionnel, elle peut être considérée comme une coupure "*complète*". La fissure divise le domaine en deux parties *indépendantes*, autrement dit, la valeur du saut du déplacement n'est pas contrôlée.

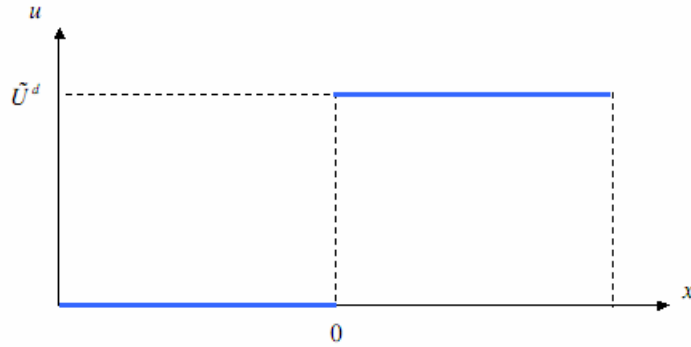


Figure 3.24: Déplacement du problème de la fissure

Revenons à notre problème de l'assemblage brasé. Pour le problème extérieur Ω^{ext} des DAR (Figure 3.25), nous imaginons "*écraser*" le joint brasé en une interface Γ^{l3} et remplacer son influence par des termes extérieurs de correction εu_{\pm}^1 .

La solution extérieure du déplacement des DAR est sous la forme:

$$u(x) = \begin{cases} u_-^0(x) + \varepsilon u_-^1(x) & x < 0 \\ u_+^0(x) + \varepsilon u_+^1(x) & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.53)$$

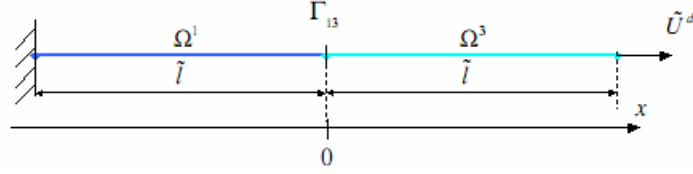


Figure 3.25: Schéma du problème extérieur des DAR

Comme u^0 est continu, $u_+^0(0) = u_-^0(0)$, le saut du déplacement $\llbracket u \rrbracket$ à travers l'interface Γ^{13} ($x=0$) ne dépend que celui des termes $u_{\pm}^1(0)$. En tenant compte de (3.19), le saut $\llbracket u \rrbracket$ est donné par:

$$\llbracket u \rrbracket = \varepsilon(u_+^1(0) - u_-^1(0)) = \varepsilon \llbracket u^1 \rrbracket = \varepsilon \frac{c_1(U_{b2} - U_{b1})}{2E_2c_2} \quad (3.54)$$

Le champ de déplacement de ce problème est présenté sur la Figure 3.26. A l'interface Γ^{13} , la valeur du saut $\llbracket u \rrbracket$ est bien déterminée à l'aide des DAR, autrement dit, dans ce cas, nous avons une discontinuité "non-complète".

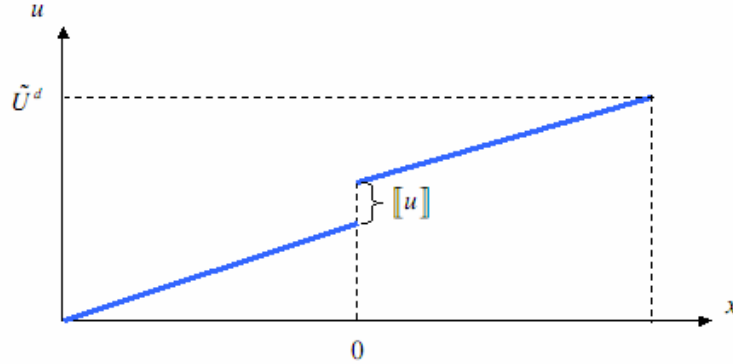


Figure 3.26: Déplacement du problème extérieur des DAR

On ne s'intéresse qu'à la valeur du saut $\llbracket u \rrbracket$ obtenue par les DAR pour construire la partie enrichie de la X-FEM. Au lieu de choisir les fonctions enrichies $\psi_m(x)$ à partir des termes des DAR, nous allons imposer la valeur du saut $\llbracket u \rrbracket$ aux paramètres d'enrichissement a_j . La méthode relative aux paramètres d'enrichissement est détaillée à travers la cinquième variante d'enrichissement dans la section suivante.

3.1.5.2. Cinquième variante

Utilisant la fonction signe modifiée pour le problème de la fissure, nous rappelons l'approximation enrichie du déplacement:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{N_n} N_i(x) u_i + \sum_{j=1}^{N_{enr}} N_j(x) (H(x) - H(x_j)) a_j \quad (3.55)$$

La fonction signe $H(x)$ peut reproduire la discontinuité, mais elle ne peut pas contrôler la valeur du saut $\llbracket u \rrbracket$ à la position $x=0$ tandis que dans notre problème, la valeur du saut est donnée par les DAR. Nous proposons la cinquième variante d'enrichissement en utilisant la fonction signe et en imposant les conditions liées au saut aux paramètres d'enrichissement.

Considérons un maillage uniforme des éléments finis pour le problème extérieur. Désignons x_{j1} et x_{j2} deux nœuds enrichis de l'élément contenant l'interface Γ^{l3} (Figure 3.27).

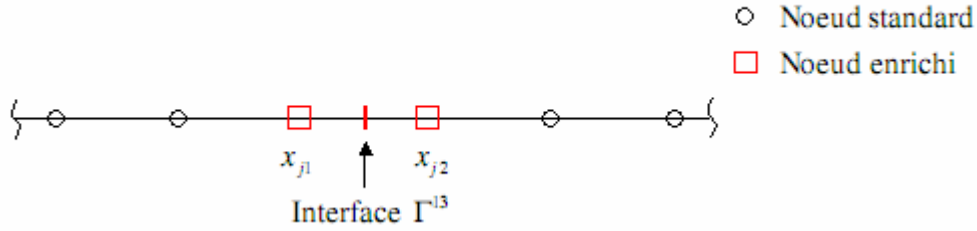


Figure 3.27: Maillage de la X-FEM avec deux nœuds enrichis

Une fois que le saut du déplacement $\llbracket u \rrbracket$ est connu, nous pouvons imposer les conditions suivantes sur les paramètres d'enrichissement:

$$\begin{cases} a_{j1} = \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket \\ a_{j2} = \frac{1}{2} \llbracket u \rrbracket \end{cases} \quad (3.56)$$

Dans la X-FEM, les paramètres d'enrichissement jouent le rôle d'inconnus nodaux ajoutés, associés aux fonctions enrichies. Les conditions imposées (3.56) peuvent être considérées comme des conditions aux limites "*particulières*".

Le saut du déplacement au travers de l'interface Γ^{l3} est calculé par:

$$\llbracket u^h(0) \rrbracket = u^h(0^+) - u^h(0^-) = (H(0^+) - H(0^-)) (N_{j1}(0) a_{j1} + N_{j2}(0) a_{j2}) = \llbracket u \rrbracket \quad (3.57)$$

La valeur du saut du déplacement $\llbracket u \rrbracket$ obtenue par les DAR est donc contrôlée exactement dans la X-FEM.

Pour étudier la robustesse de la cinquième variante d'enrichissement, nous considérons l'application du couplage DAR-X-FEM pour résoudre le problème dont les données sont identiques à la section précédente:

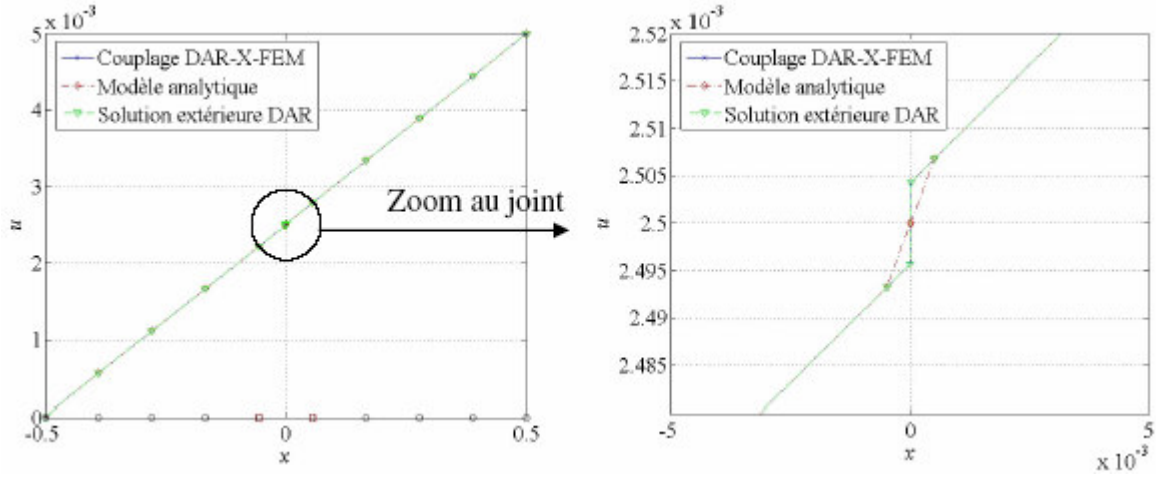
- Cas symétrique:

$$\begin{cases} E_1 = 200(GPa) \\ E_2 = 74(GPa) \\ E_3 = 200(GPa) \\ L = 100(mm) \\ e_j = 0.1(mm) \\ U^d = 0.5(mm) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = 200(GPa) \\ E_2 = 74(GPa) \\ E_3 = 200(GPa) \\ \tilde{L} = 1 \\ \varepsilon = 10e-4 \\ \tilde{U}^d = 0.005 \end{cases} \quad (3.58)$$

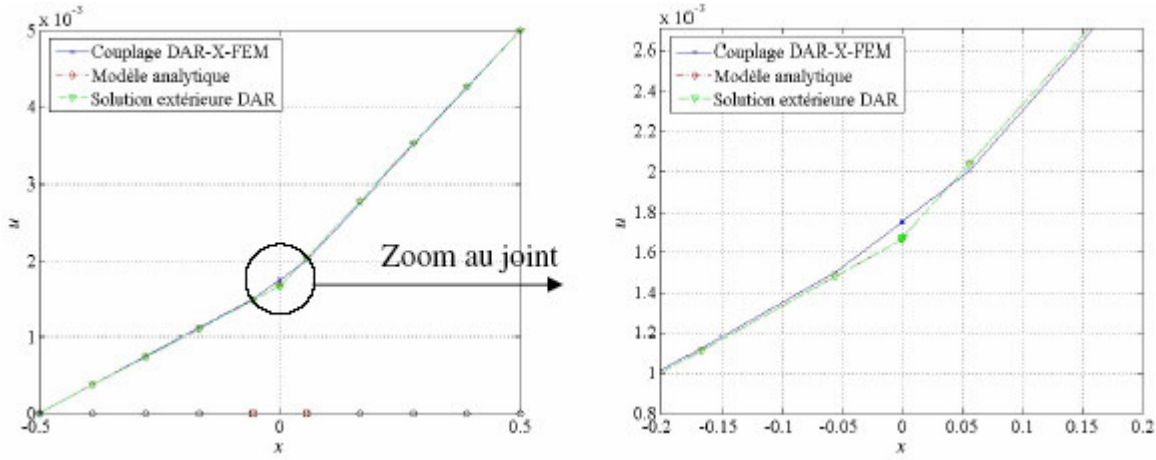
- Cas dissymétrique:

$$\begin{cases} E_1 = 200(GPa) \\ E_2 = 74(GPa) \\ E_3 = 100(GPa) \\ L = 100(mm) \\ e_j = 0.1(mm) \\ U^d = 0.5(mm) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = 200(GPa) \\ E_2 = 74(GPa) \\ E_3 = 100(GPa) \\ \tilde{L} = 1 \\ \varepsilon = 10e-4 \\ \tilde{U}^d = 0.005 \end{cases} \quad (3.59)$$

Le déplacement obtenu par le couplage DAR-X-FEM est comparé avec la solution extérieure des DAR et celle du modèle analytique (voir Figure 3.28). Notons qu'il faut enrichir seulement deux nœuds autour de la position de l'interface Γ^{13} .



(a) Assemblage symétrique



(a) Assemblage dissymétrique

 Figure 3.28: Déplacement obtenu par la 5^{ème} variante d'enrichissement

Les trois solutions sont bien concordantes dans le domaine global. Le modèle analytique modélise l'assemblage de trois couches en conservant la géométrie du joint brasé, tandis que pour les DAR et le couplage DAR-X-FEM, le joint est écrasé en une interface, *i.e.* le modèle de deux couches et une discontinuité particulière. Cela explique la différence entre la solution analytique et les solutions du couplage DAR-X-FEM et des DAR autour de l'interface (joint dégénéré). Par contre, pour le cas symétrique, nous pouvons constater la concordance parfaite entre la solution du couplage DAR-X-FEM et la solution extérieure des DAR. Le couplage DAR-X-FEM présente

exactement le saut du déplacement $\llbracket u \rrbracket$ donné par les DAR à travers de l'interface dans ce cas là.

Pour le cas dissymétrique, les résultats des trois approches sont moins cohérents.

Nous considérons trois discrétisations différentes du maillage: $Nn = 10, 20$ et 30 . Les erreurs entre le couplage DAR-X-FEM et le modèle analytique ainsi qu'entre le couplage et la solution extérieure des DAR sont résumées dans le Tableau 3.5. Pour le cas symétrique, les erreurs entre le couplage et la solution extérieure des DAR sont extrêmement faibles (de l'ordre de $1e-17$), tandis que les erreurs entre le couplage et le modèle analytique sont acceptables (de l'ordre de $1e-6$) mais elles peuvent être améliorées selon la fonction choisie. Pour le cas dissymétrique, les erreurs augmentent considérablement (de l'ordre de $1e-5$ entre le couplage et le calcul analytique et de l'ordre de $1e-7$ entre le couplage et le DAR extérieur).

Cas symétrique					
Nn	h	Couplage - Analytique		Couplage - DAR extérieur	
		$\ err\ $	err_{\max}	$\ err\ $	err_{\max}
10	0.1111	6.02e-6	4.257e-6	1.879e-17	5.204e-18
20	0.0526	6.02e-6	4.257e-6	6.785e-18	3.479e-18
30	0.0345	6.02e-6	4.257e-6	1.906e-18	1.301e-18
Cas dissymétrique					
Nn	h	Couplage - Analytique		Couplage - DAR extérieur	
		$\ err\ $	err_{\max}	$\ err\ $	err_{\max}
10	0.1111	1.744e-4	8.444e-5	1.751e-6	8.327e-7
20	0.0526	6.676e-5	3.862e-5	6.676e-7	3.862e-7
30	0.0345	4.711e-5	2.506e-5	4.711e-7	2.506e-7

Tableau 3.5: Erreurs d'approximation avec la 5^{ème} variante d'enrichissement en utilisant la fonction signe standard

Une alternative pour améliorer la concordance entre le couplage DAR-X-FEM et le modèle analytique, consiste à utiliser la fonction Heaviside régularisée au lieu de la fonction signe standard. Le but est de remplacer l'interface "brusquement" discontinue Γ^{13} par une couche de transition, autrement dit, la discontinuité du déplacement à travers de Γ^{13} est lissée.

(Benvenuti, 2008) et (Benvenuti *et al.*, 2008) proposent un choix pour la fonction Heaviside régularisée qui dépend d'un paramètre ρ :

$$H_{\rho}(x) = \begin{cases} -1 + e^{x/\rho} & x < 0 \\ 1 - e^{-x/\rho} & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.60)$$

La largeur de la couche de transition pour la fonction Heaviside régularisée (3.60) est de $L_{\rho} = 2\rho$.

La limite de la fonction Heaviside régularisée est donnée par:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} H_{\rho}(x) = \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 1 & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.61)$$

ce qui coïncide avec la fonction signe standard (3.50).

Sur la Figure 3.29, la fonction Heaviside régularisée est tracée pour les trois valeurs différentes de ρ : $\rho = 0.01; 0.001$ et 0.0001 .

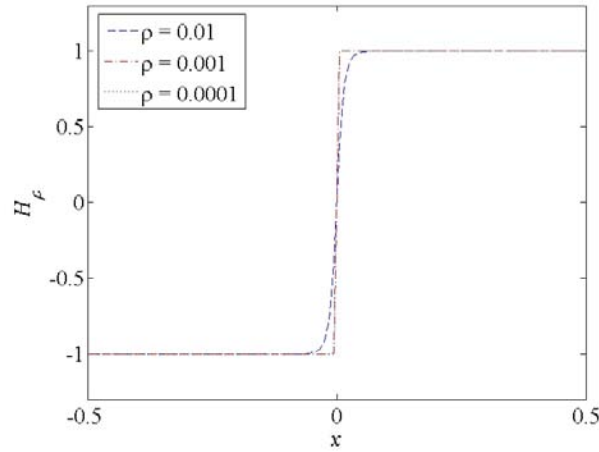


Figure 3.29: Fonction Heaviside régularisée

En appliquant la fonction Heaviside régularisée (3.60) avec trois valeurs de ρ , la solution obtenue par le couplage DAR-X-FEM est comparée avec la solution du modèle analytique (Figure 3.30) pour le cas symétrique. On obtient les meilleurs résultats (*i.e.* les plus proches de ceux obtenus avec le modèle analytique) en prenant la valeur $\rho = 10e-5 < \varepsilon = 10e-4$ dans le modèle basé sur couplage DAR-X-FEM.

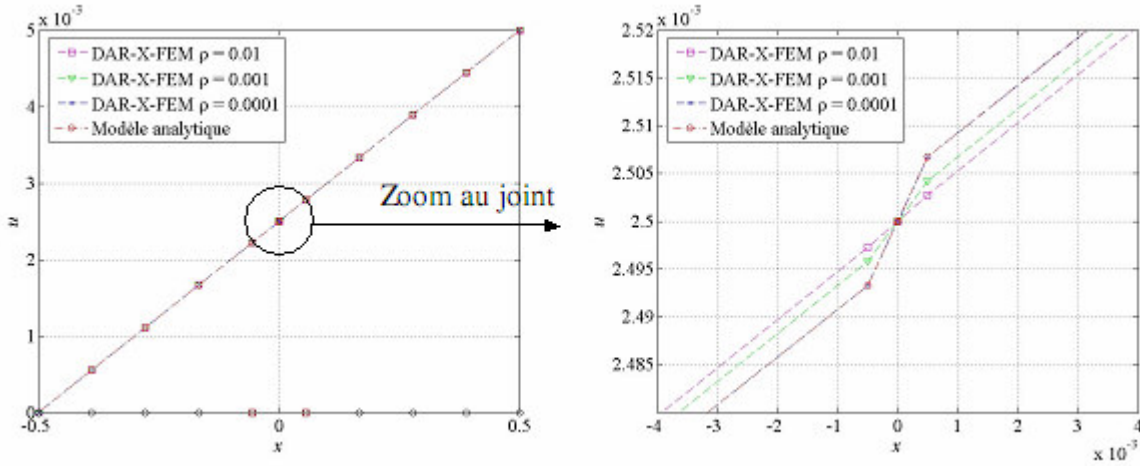
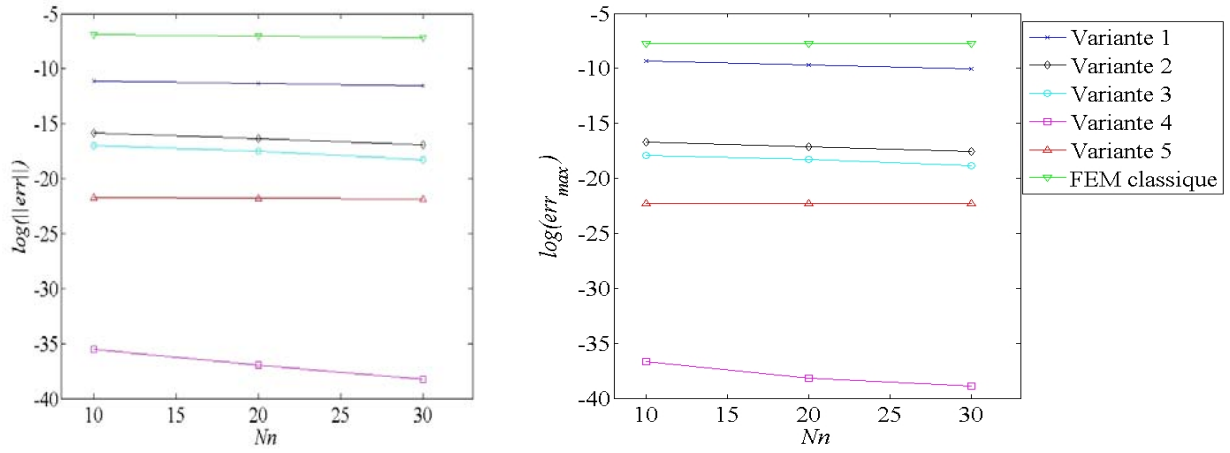
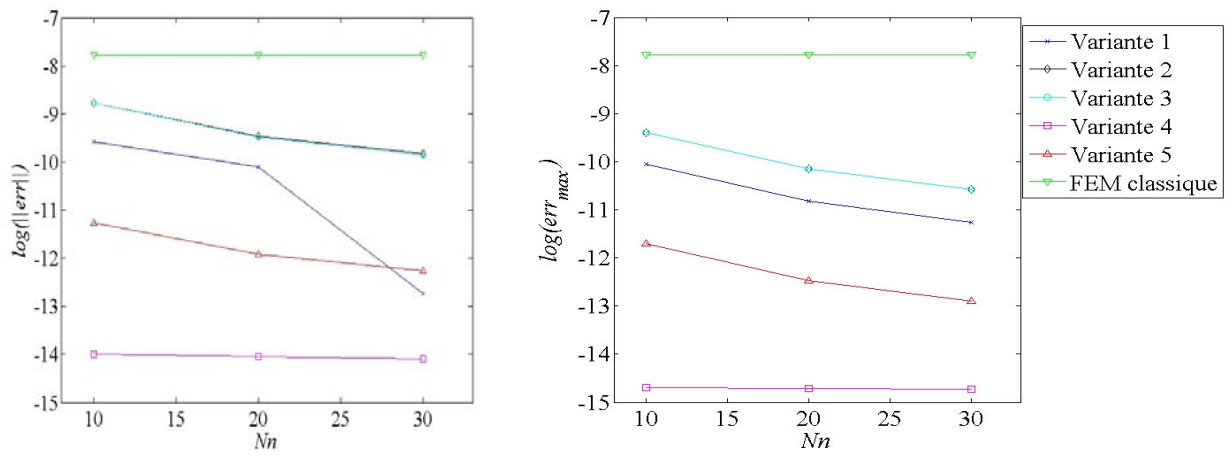


Figure 3.30: Comparaison entre le modèle basé sur le couplage DAR-X-FEM utilisant la fonction Heaviside régularisée et le modèle analytique pour le cas symétrique

Afin de comparer le couplage DAR-X-FEM et la FEM classique ainsi que la méthode relative aux paramètres d'enrichissement (la cinquième variante) et la méthode relative aux fonctions enrichies (les quatre premières variantes), nous présentons leurs courbes de convergence sur la Figure 3.31. Premièrement, il est évident de constater que la convergence du couplage DAR-XFEM est nettement meilleure que celle de la FEM classique pour ce problème. Deuxièmement, la cinquième variante est plus précise que les trois variantes (1^{ère}, 2^{ème} et 3^{ème}) mais moins bonne que la quatrième. Cependant, comme nous avons discuté, la cinquième variante possède un avantage important vis-à-vis les variantes de la méthode relative aux fonctions enrichies. La méthode relative aux fonctions enrichies présentée à travers les quatre variantes (de la première à la quatrième) est pratique pour le cas unidimensionnel mais compliquée, voire impossible à mettre en œuvre pour les cas multidimensionnels. Au contraire, la méthode relative aux paramètres d'enrichissement qui est présentée dans la cinquième variante montre la bonne faisabilité pour le cas unidimensionnel et la fiabilité prometteuse pour les cas multidimensionnels.



(a) Assemblage symétrique



(b) Assemblage dissymétrique

Figure 3.31: Convergence au sens de la norme L^2 de l'erreur et de l'erreur maximale en fonction du nombre des noeuds du maillage Nn

3.2. Couplage DAR - X-FEM pour le problème thermique transitoire unidimensionnel de l'assemblage brasé

3.2.1. Modèle thermique unidimensionnel de l'assemblage brasé

Nous considérons un assemblage brasé de trois couches: deux substrats Ω^1 , Ω^3 et le joint Ω^2 (cf. Figure 3.32). Désignons l l'épaisseur de chaque substrat, e_j l'épaisseur du joint, L l'épaisseur totale et b la largeur du modèle. Les caractéristiques thermiques des matériaux de l'assemblage sont les conductivités thermiques $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et les diffusivités thermiques D_1, D_2, D_3 dans $\Omega^1, \Omega^2, \Omega^3$, respectivement.

Notons que T_e et T_s sont les températures aux extrémités de l'assemblage brasé. Considérons trois points P_1 , P_2 et P_3 situés dans Ω^1 , à l'interface $\Omega^1 - \Omega^2$ et dans Ω^3 , respectivement. L'évolution de la température et du flux de chaleur en ces points sera considérée ultérieurement.

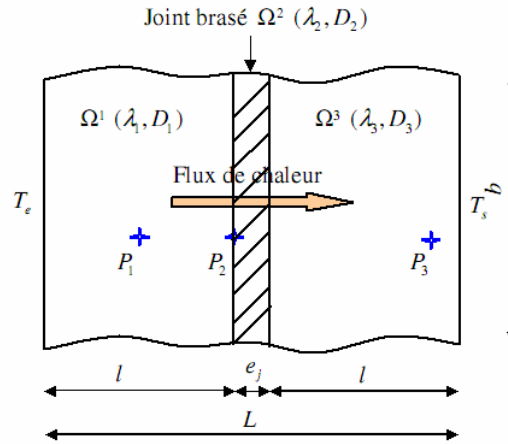


Figure 3.32: Modèle de l'assemblage brasé pour le problème thermique transitoire

En supposant que la largeur b du modèle est très grande par rapport à son épaisseur L et que le flux de chaleur est dirigé suivant la direction de l'épaisseur, le problème peut être ramené au cas unidimensionnel de l'assemblage brasé. Nous pouvons réutiliser le modèle unidimensionnel adimensionné présenté sur la Figure 3.2 de la section 3.1.1.

3.2.2. Approche des DAR en régime permanent

En s'appuyant sur l'approche des DAR pour le problème mécanique de la partie précédente, nous considérons dans cette section l'application des DAR pour le problème thermique.

Puisque la position du joint est fixée dans le domaine d'assemblage brasé, nous admettons que le joint est considéré comme une singularité au sens "spatial" et "non temporel".

En supposant que chaque matériau dans Ω^1, Ω^2 et Ω^3 est homogène et isotrope, qu'il n'y a pas de génération d'énergie à l'intérieur du système, les équations qui permettent d'obtenir le champ de température $T(x)$ ainsi que la densité de flux de chaleur sont données en régime permanent par:

$$\frac{d^2 T}{dx^2} = 0 \quad \text{dans } \Omega^1, \Omega^2 \text{ et } \Omega^3 \quad (3.62)$$

$$\phi = -\lambda \frac{dT}{dx} \quad \text{dans } \Omega^1, \Omega^2 \text{ et } \Omega^3 \quad (3.63)$$

où ϕ est la densité du flux de chaleur, λ étant la conductivité thermique, prend la valeur égale à $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ dans Ω^1, Ω^2 et Ω^3 , respectivement.

Les contacts thermiques aux interfaces Γ^1 (Ω^1 - Ω^2) et Γ^3 (Ω^2 - Ω^3) sont supposés parfaits, *i.e.* il n'y a pas de résistance de contact entre les couches:

$$[[\phi]] = [[T]] = 0 \quad \text{aux interfaces } \Gamma^1 \text{ et } \Gamma^3 \quad (3.64)$$

De façon identique au cas mécanique, nous définissons un petit paramètre unique ε étant l'épaisseur normalisée du joint par rapport à l'épaisseur totale L de l'assemblage.

L'application des DAR pour le champ de température nous amène à définir ses deux développements asymptotiques à l'extérieur et dans la couche limite.

Le développement extérieur valable à l'extérieur de la couche limite est donné sous la forme:

$$T_{\mp}^{\varepsilon}(x) = T_{\mp}^0(x) + \varepsilon T_{\mp}^1(x) + \dots \quad \text{dans } \Omega^1 \text{ (indice "-")} \text{ et } \Omega^3 \text{ (indice "+")} \quad (3.65)$$

Dans la couche limite, en appliquant le changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$ afin de dilater la région

étroite au voisinage du joint, nous proposons le développement intérieur:

$$T_{\mp}^{\varepsilon}(\varepsilon y) = \tau_{\mp}^0(y) + \varepsilon \tau_{\mp}^1(y) + \dots \quad \text{dans } \Omega_{-}^2 \text{ (indice "-")} \text{ et } \Omega_{+}^2 \text{ (indice "+")} \quad (3.66)$$

En combinant les équations du problème et la règle de raccordement énoncée au chapitre 2, la détermination des termes de température dans ces deux développements est identique à la résolution des termes de déplacement pour le problème mécanique.

Les termes extérieurs s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_-^0 = \frac{\lambda_3(T_s - T_e)}{d_2}x + \frac{\lambda_1 x_{b2}T_e - \lambda_3 x_{b1}T_s}{d_2} \\ T_+^0 = \frac{\lambda_1(T_s - T_e)}{d_2}x + \frac{\lambda_1 x_{b2}T_e - \lambda_3 x_{b1}T_s}{d_2} \\ T_-^1 = \frac{\lambda_3(T_e - T_s)d_1}{2\lambda_2 d_2^2}(x - x_{b1}) \\ T_+^1 = \frac{\lambda_1(T_e - T_s)d_1}{2\lambda_2 d_2^2}(x - x_{b2}) \end{array} \right. \quad (3.67)$$

Les termes intérieurs sont donnés par:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tau^0 = \frac{\lambda_1 x_{b2}T_e - \lambda_3 x_{b1}T_s}{d_2} \\ \tau_-^1 = \frac{\lambda_3(T_s - T_e)}{2\lambda_2 d_2} \left[\frac{2\lambda_1 y}{\varepsilon} + (\lambda_1 - \lambda_2) + \frac{x_{b1}d_1}{d_2} \right] \\ \tau_+^1 = \frac{\lambda_1(T_s - T_e)}{2\lambda_2 d_2} \left[\frac{2\lambda_3 y}{\varepsilon} + (\lambda_2 - \lambda_3) + \frac{x_{b2}d_1}{d_2} \right] \end{array} \right. \quad (3.68)$$

où $d_1 = 2\lambda_1\lambda_3 - \lambda_2\lambda_3 - \lambda_1\lambda_2$; $d_2 = \lambda_1 x_{b2} - \lambda_3 x_{b1}$.

3.2.3. Formulation variationnelle de la X-FEM pour le problème transitoire

En s'appuyant sur la formulation des éléments finis standard proposée par (Zienkiewicz *et al.*, 1989), (Lewis *et al.*, 2004) ou (Pelissou, 2005), nous présentons ici la formulation de la X-FEM pour le problème thermique 1D transitoire dans le cas général.

Un domaine Ω , contenant une singularité, est soumis à une température T_{imp} constante sur la partie Γ_T de sa frontière et à une densité de flux de chaleur ϕ_{imp} sur l'autre partie Γ_ϕ ($\Gamma = \Gamma_T \cup \Gamma_\phi$, $\Gamma_T \cap \Gamma_\phi = \emptyset$) (cf. Figure 3.33). La température initiale T_0 est homogène pour tous les points du domaine.

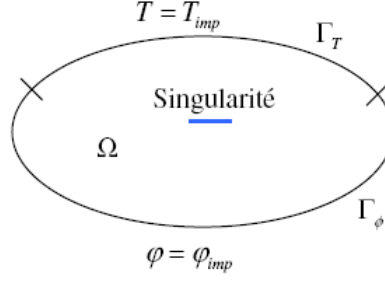


Figure 3.33: Domaine Ω avec les conditions aux limites sur sa frontière

La formulation forte de ce problème qui est écrite pour la température $T(x, t)$ consiste en:

$$\begin{cases} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} - \text{div}(\lambda \overrightarrow{\nabla T}) = \dot{\omega} & \text{dans } \Omega \times]0, t[\\ T(x, 0) = T_0 & \forall x \in \Omega \\ T = T_{imp} & \text{sur } \Gamma_T \times]0, t[\\ -\lambda \overrightarrow{\nabla T} \cdot \vec{n} = \phi_{imp} & \text{sur } \Gamma_\phi \times]0, t[\end{cases} \quad (3.69)$$

où ρ est la masse volumique, c est la capacité calorifique spécifique, $\dot{\omega}$ est la source interne, \vec{n} est le vecteur normal à la frontière.

Considérons l'espace V des fonctions tests v s'annulant sur Γ_T . En multipliant l'équation de la chaleur dans la formulation forte (3.69) par v et en intégrant sur le domaine Ω , on obtient:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega - \int_{\Omega} \text{div}(\lambda \overrightarrow{\nabla T}) v d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\omega} v d\Omega \quad \forall v \in V \quad (3.70)$$

En appliquant l'intégration par parties (théorème d'Ostrogradski) et en tenant compte des conditions aux limites, la formulation faible du problème est:

$$\int_{\Omega} \rho c \frac{\partial T}{\partial t} v d\Omega + \int_{\Omega} \lambda \overrightarrow{\nabla T} \cdot \overrightarrow{\nabla v} d\Omega = \int_{\Omega} \dot{\omega} v d\Omega - \int_{\Gamma_\phi} \phi_{imp} v d\Gamma \quad \forall v \in V \quad (3.71)$$

Comme pour la méthode des éléments finis classiques et afin de déterminer la solution de (3.71) par la X-FEM, le domaine Ω est ainsi partitionné en l'ensemble des Nel éléments Ω_e qui sont connectés par l'intermédiaire de Nn nœuds, appelé maillage. La singularité dont la position est supposée *fixée* dans le domaine est indépendante du maillage. Sa présence est capturée par des *fonctions enrichies*. Les fonctions enrichies sont incorporées aux nœuds qui sont *au voisinage* de la singularité — les nœuds enrichis.

Le champ enrichi de température est approché sous la forme discrétisée:

$$T(x, t) = \sum_{i=1}^{Nn} N_i(x) T_i(t) + \sum_{k=1}^{Nenr} N_k(x) \psi_m(x) a_k(t) \quad (3.72)$$

où $Nenr$ est le nombre des noeuds enrichis, N_i et N_k sont les fonctions de forme classiques, ψ_m sont les fonctions enrichies, T_i sont les valeurs nodales de température, a_k sont les paramètres d'enrichissement associés aux fonctions enrichies.

En introduisant (3.72) dans la formulation faible (3.71), nous obtenons des équations sous forme matricielle:

$$[C] \frac{\partial \{T\}}{\partial t} + [K] \{T\} = \{Q\} \quad (3.73)$$

où

$\{T\}$ est le vecteur des inconnues dont la définition est donnée par:

$$\{T\} = \{T_1 \dots T_{Nn} \ a_1 \dots a_{Nenr}\}^T$$

$[C]$ est la matrice de capacité, définie par:

$$[C] = \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \rho c^T [N] [N] d\Omega$$

$[K]$ est la matrice de conductivité telle que:

$$[K] = \sum_{e=1}^{Nel} \int_{\Omega_e} \lambda^T [B] [B] d\Omega$$

$\{Q\}$ est le vecteur de chargement, déterminé par:

$$\{Q\} = \sum_{e=1}^{Nel} \left(\int_{\Omega_e} \dot{\omega}^T [N] d\Omega - \int_{(\Gamma_\phi)_e} \phi_{imp}^T [N] d\Gamma \right)$$

Dans les formules ci-dessus, $[N]$ qui représente la matrice des fonctions d'interpolation, est définie différemment pour les éléments non-enrichis et les éléments contenant au moins un nœud enrichi.

$$[N] = \begin{cases} [N_i] & \text{pour les éléments non-enrichis} \\ [N_i \ N_j \psi] & \text{pour les éléments contenant des noeuds enrichis} \end{cases}$$

$[B]$ désigne la matrice des gradients. Elle est aussi différente suivant le type d'éléments:

$$[B] = \begin{cases} [N_{i,x}] & \text{pour les éléments non-enrichis} \\ [N_{i,x} \ (N_j \psi)_{,x}] & \text{pour les éléments contenant des noeuds enrichis} \end{cases}$$

En fait, les équations données par (3.73) présentent un système différentiel linéaire dans lequel la température T dépend simultanément du temps t et de la variable spatiale x . Pour approcher la solution de ce système, il nous faut mettre en œuvre un schéma numérique d'intégration en temps, nécessaire pour exprimer les dérivées temporelles. Dans la littérature, il existe plusieurs schémas d'approximations temporelles. Ici, nous choisissons le schéma à deux pas de temps.

Comme nous ne pouvons pas déterminer le vecteur des inconnues $\{T\}$ de l'équation (3.73) pour toutes les valeurs du temps t dans une intervalle $[0, t^d]$, il est acceptable de calculer approximativement $\{T\}^m$ de $\{T(t^m)\}$ pour certains points discrétisés $(t^m)_{m=0}^M$ (avec $M \leq d$) de l'intervalle. La relation entre les vecteurs des inconnues de deux pas de temps consécutifs est donnée par:

$$\alpha \frac{\partial \{T\}^{m+1}}{\partial t} + (1-\alpha) \frac{\partial \{T\}^m}{\partial t} = \frac{\{T\}^{m+1} - \{T\}^m}{\Delta t} \quad (3.74)$$

où α est le coefficient choisi dans l'intervalle $[0,1]$, Δt est le pas de temps, défini par:

$$\Delta t = t^{m+1} - t^m$$

Le choix du pas de temps Δt doit satisfaire à la condition de stabilité temporelle et spatiale suivante:

$$\frac{1}{6} \leq D \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (3.75)$$

où D est la diffusivité thermique, Δx est la taille de l'élément qui est le plus proche de la surface dont le gradient de température est le plus élevé.

En remplaçant (3.74) dans (3.73), nous obtenons:

$$\left(\frac{[C]}{\Delta t} + \alpha [K] \right) \{T\}^{m+1} = \left(\frac{[C]}{\Delta t} - (1-\alpha) [K] \right) \{T\}^m + (1-\alpha) \{Q\}^m + \alpha \{Q\}^{m+1} \quad (3.76)$$

A l'aide de (3.76), on peut calculer $\{T\}^{m+1}$ en supposant $\{T\}^m$ connu. Suivant la valeur choisie pour α , on distingue trois schémas de calcul:

- Schéma d'Euler explicite ($\alpha = 0$):

$$\frac{[C]}{\Delta t} \{T\}^{m+1} = \left(\frac{[C]}{\Delta t} - [K] \right) \{T\}^m + \{Q\}^m \quad (3.77)$$

- Schéma d'Euler implicite ($\alpha = 1$):

$$\left(\frac{[C]}{\Delta t} + [K] \right) \{T\}^{m+1} = \frac{[C]}{\Delta t} \{T\}^m + \alpha \{Q\}^{m+1} \quad (3.78)$$

- Schéma de Crank-Nicholson ($\alpha = \frac{1}{2}$):

$$\left(\frac{[C]}{\Delta t} + \frac{1}{2}[K] \right) \{T\}^{m+1} = \left(\frac{[C]}{\Delta t} - \frac{1}{2}[K] \right) \{T\}^m + \frac{1}{2}\{Q\}^m + \frac{1}{2}\{Q\}^{m+1} \quad (3.79)$$

3.2.4. Fonctions enrichies

Comme abordé dans le problème mécanique, la méthode relative aux fonctions enrichies fonctionne bien dans le cas unidimensionnel. Parmi quatre variantes d'enrichissement de cette méthode du couplage DAR-X-FEM, la quatrième présente la meilleure performance, notamment pour le cas unidimensionnel où le maillage est facilement manipulable. D'autre part, la position du joint n'est pas une fonction du temps et autour du joint, on est presque toujours en régime permanent. Par conséquent, pour le problème thermique transitoire, nous pouvons utiliser la quatrième variante d'enrichissement dont les fonctions enrichies sont calculées en régime permanent (Figure 3.34).

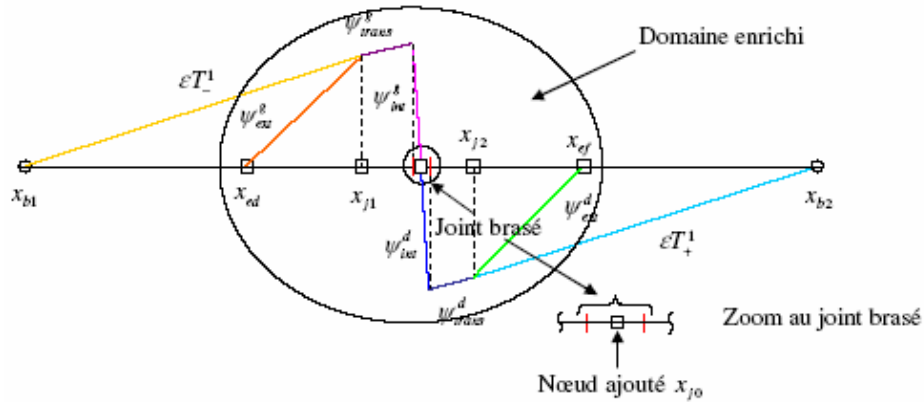


Figure 3.34: Variante d'enrichissement utilisée pour le problème thermique

Les conditions imposées permettent la détermination des fonctions enrichies à partir des termes des DAR:

- Pour les fonctions extérieures:

$$\begin{cases} \psi_{ext}^g(x_{ed}) = \psi_{ext}^d(x_{ef}) = 0 \\ \psi_{ext}^g(x_{j1}) = \varepsilon T_-^1(x_{j1}) \\ \psi_{ext}^d(x_{j2}) = \varepsilon T_+^1(x_{j2}) \end{cases} \quad (3.80)$$

- Pour les fonctions intérieures:

$$\begin{cases} \psi_{int}^g(x) = \varepsilon \tau_-^1(x) \\ \psi_{int}^d(x) = \varepsilon \tau_+^1(x) \end{cases} \quad (3.81)$$

- Pour les fonctions de transition:

$$\begin{cases} \psi_{trans}^g(x_{j1}) = \psi_{ext}^g(x_{j1}) \\ \psi_{trans}^g(x_{jb1}) = \psi_{int}^g(x_{jb1}) \\ \psi_{trans}^d(x_{jb2}) = \psi_{int}^d(x_{jb2}) \\ \psi_{trans}^d(x_{j2}) = \psi_{ext}^d(x_{j2}) \end{cases} \quad (3.82)$$

3.2.5. Validation à l'aide de la méthodes des quadripôles

Pour valider les résultats du problème thermique transitoire, un certain nombre de méthodes peuvent être appliquées, telles que: la méthode de prise de moyenne (Vilums *et al.*, 2006), la méthode basée sur l'étude de Papoulis Berg (Garbai *et al.*, 2006), mais dans notre étude, nous choisissons la méthode des quadripôles.

Dans l'étude thermique, la méthode des quadripôles, développée par (Degiovanni, 1988) et présentée en détail par (Maillet *et al.*, 2000), a été utilisée pour résoudre des problèmes thermiques transitoires, par exemple, le transfert de chaleur pour des outils de coupe (Lazard *et al.*, 2004) ou pour des moules stratifiés (Lazard, 2006). Dans ce travail, on utilise la méthode des quadripôles pour valider le couplage DAR-X-FEM. Par ailleurs, nous rappelons en quelques lignes les caractéristiques de cette méthode.

La formulation quadripolaire donne la relation entre le vecteur de température – densité de flux de chaleur à l'entrée et le vecteur à la sortie d'un bloc de matière grâce à une matrice de transfert M :

$$\begin{pmatrix} T(x_e, p) \\ \phi(x_e, p) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} M_{11}(p) & M_{12}(p) \\ M_{21}(p) & M_{22}(p) \end{pmatrix}}_M \begin{pmatrix} T(x_s, p) \\ \phi(x_s, p) \end{pmatrix} \quad (3.83)$$

où p est la variable de Laplace, M_{11}, M_{12}, M_{21} et M_{22} sont les coefficients matriciels dont les définitions sont présentées ci-après, x_e et x_s sont les coordonnées d'entrée et de sortie,

respectivement. Pour obtenir la formulation (3.83), l'équation de la chaleur transitoire (3.69) a été transformée par la transformation de Laplace.

La Figure 3.35 ci-dessous illustre la représentation schématique de la méthode quadripolaire.

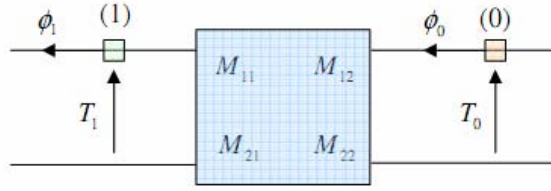


Figure 3.35: Représentation de la méthode des quadripôles

Dans notre cas, l'assemblage brasé contient trois couches: substrat - joint - substrat et le flux de chaleur traverse transversalement les couches. Nous pouvons considérer l'assemblage brasé comme une association en série de trois quadripôles (Figure 3.36).

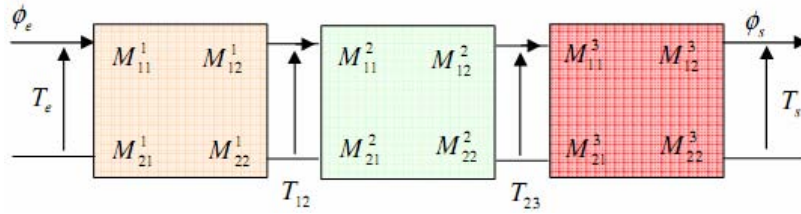


Figure 3.36: Association en série de trois quadripôles

La matrice totale de transformation est alors le produit de trois matrices composantes:

$$M = \prod_{i=1}^3 M^i \quad (3.84)$$

Chaque matrice composante est calculée par:

$$M^i = \begin{pmatrix} \cosh(Z_i) & \sinh\left(\frac{Z_i}{\Delta_i}\right) \\ \Delta_i \sinh(Z_i) & \cosh(Z_i) \end{pmatrix} \quad (3.85)$$

où $Z_i = k_i e_i$, $\Delta_i = \lambda_i k_i$, $k_i = \sqrt{p/D_i}$

e_i , λ_i et D_i sont respectivement l'épaisseur, la conductivité et la diffusivité thermiques de la couche i .

Dans l'équation (3.83), parmi les quatre termes de température et de densité de flux, deux termes sont directement déterminés en se basant sur les conditions aux limites. Les deux autres termes

sont calculés à l'aide de (3.83). Dès que deux vecteurs à l'entrée et/ou à la sortie sont connus, on peut déduire le vecteur de température et de densité de flux en n'importe quel point du domaine. En appliquant la transformation inverse de Laplace, proposée par (Stehfest, 1970) ou par (De Hoog *et al.*, 1982), les fonctions dépendantes de la variable de Laplace p sont transformées en des fonctions dépendant de la variable temporelle t (retour dans l'espace temps).

3.2.6. Application numérique

Dans cette section, nous considérons la mise en œuvre du couplage DAR-X-FEM pour le problème thermique transitoire en présentant une application numérique.

L'assemblage brasé de trois couches est présenté sur la Figure 3.32 avec les caractéristiques thermophysiques extraites des travaux de (Lazard, 2006):

$$\begin{cases} \lambda_1 = \lambda_3 = 15 (W / m.^{\circ}C) \\ \lambda_2 = 370 (W / m.^{\circ}C) \\ D_1 = D_3 = 3.98 \times 10^{-6} (m^2 / s) \\ D_2 = 1.061 \times 10^{-4} (m^2 / s) \\ L = 100 (mm) \\ e_j = 0.1 (mm) \end{cases} \quad (3.86)$$

Les diffusivités thermiques doivent être normalisées par le carré de la longueur totale L de l'assemblage. Les autres grandeurs sont normalisées par la longueur L :

$$\begin{cases} \tilde{\lambda}_1 = \tilde{\lambda}_3 = 150 (W / m^2.^{\circ}C) \\ \tilde{\lambda}_2 = 3700 (W / m^2.^{\circ}C) \\ \tilde{D}_1 = \tilde{D}_3 = 3.98 \times 10^{-4} (s^{-1}) \\ \tilde{D}_2 = 1.061 \times 10^{-2} (s^{-1}) \\ \tilde{L} = 1 \\ \varepsilon = 10^{-3} \end{cases} \quad (3.87)$$

Dans le but de simplifier les calculs, nous supposons que la température initiale est nulle dans tout le domaine:

$$T^0 = T_{ini} = 0^{\circ}C \quad (3.88)$$

Les conditions aux limites sont traduites par la température de Heaviside à l'entrée et la température imposée à la sortie:

$$\begin{cases} T(x = x_e \equiv x_{b1}) = \begin{cases} 0^\circ\text{C} & \text{pour } t = 0 \\ 100^\circ\text{C} & \text{pour } t > 0 \end{cases} \\ T(x = x_s \equiv x_{b2}) = 0^\circ\text{C} & \text{pour } t \geq 0 \end{cases} \quad (3.89)$$

La distribution de température est déterminée pour l'intervalle de temps $t = [0, 900\text{s}]$ avec le pas constant $\Delta t = 3\text{s}$. Le maillage comprend $N_n = 21$ (nœuds) dont un nœud est au milieu du joint. La taille de l'élément à l'entrée du domaine, où le gradient de température est le plus élevé, est donc $\Delta x = 0.0526$.

Le temps caractéristique du problème est calculé par:

$$t_c = \frac{D\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{D_1\Delta t}{\Delta x^2} = \frac{3.98 \times 10^{-4} \times 3}{0.0526^2} = 0.431 \quad (3.90)$$

Cette valeur satisfait largement la condition de stabilité (3.75). Nous appliquons le schéma de calcul de Crank-Nicholson donné par (3.79).

Les profils de température aux différents instants correspondant à $t = 30, 60, 120, 300, 600, 900\text{s}$ sont présentés sur la Figure 3.37. "TDAXF" et "TQuad" désignent les températures obtenues par le couplage DAR-X-FEM et par la méthode des quadripôles respectivement. Pour un certain nombre de premiers pas de temps où le choc thermique est important, le résultat du couplage est différent de celui de la méthode des quadripôles. En revanche, quand le temps augmente, *i.e.* en approchant du régime permanent, les courbes obtenues par les deux méthodes coïncident.

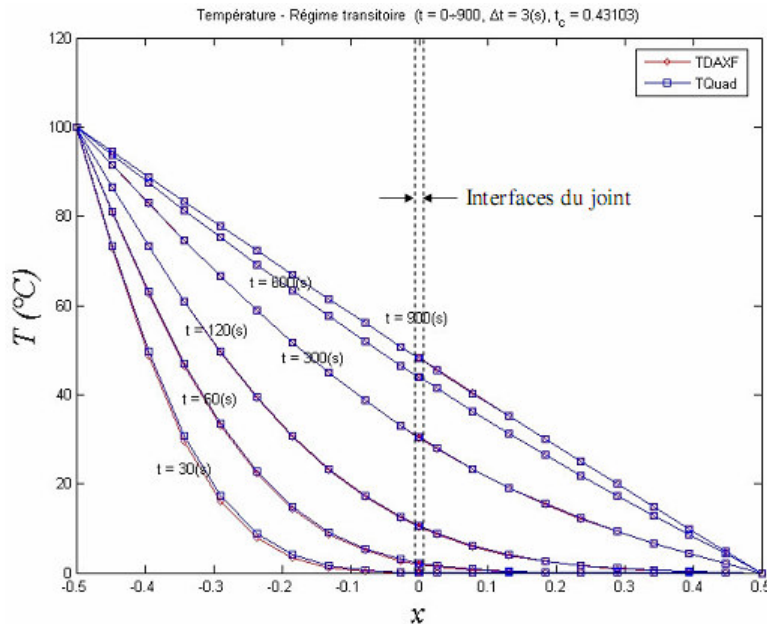


Figure 3.37: Profils de température

Nous choisissons trois points P_1 , P_2 et P_3 , dont les positions sont données par: $x_{P_1} = -0.3421$, $x_{P_2} = -5 \times 10^{-4}$, $x_{P_3} = 0.4474$, pour présenter les évolutions de température et de densité de flux en fonction du temps. Pour mémoire, P_1 , P_2 et P_3 se situent dans Ω^1 , à l'interface $\Omega^1 - \Omega^2$ et dans Ω^3 , respectivement. Les courbes présentées sur la Figure 3.38 montre une excellente cohérence entre les résultats du couplage DAR-X-FEM et de la méthode des quadripôles.

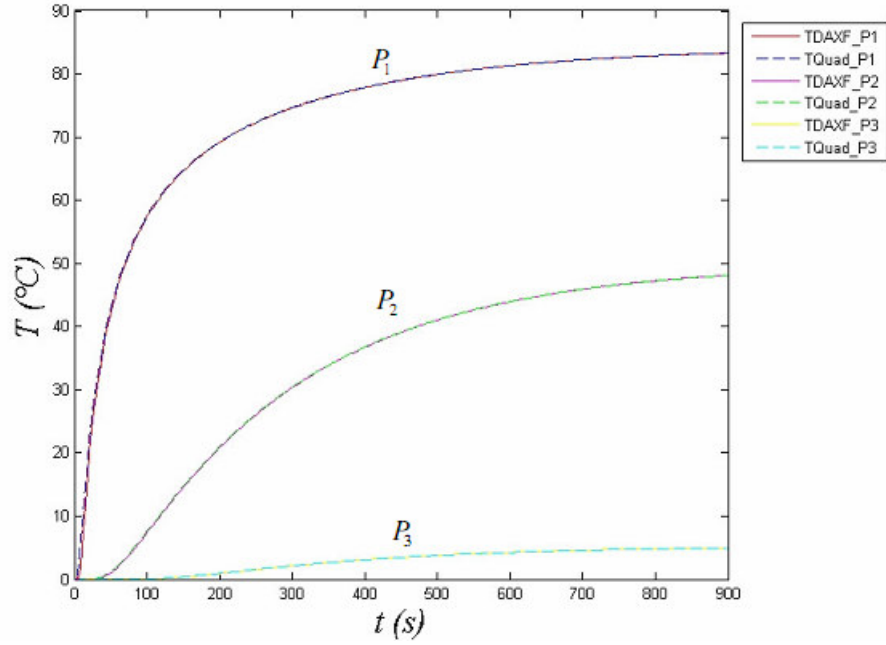


Figure 3.38: Evolutions de température en trois points P_1 , P_2 et P_3

Les évolutions de densité de flux en trois points P_1 , P_2 et P_3 , respectivement dans le substrat côté chaud, à l'interface et dans le substrat côté froid, sont illustrées sur la Figure 3.39. L'écart entre les deux courbes obtenues par le couplage DAR-X-FEM et par la méthode des quadripôles au point P_1 est considérable pour les premiers pas de temps où le gradient de température à l'entrée peut provoquer des perturbations pour le calcul des éléments finis. Pour les pas suivants ou pour les points loin de l'entrée (P_2 ou P_3), les courbes du couplage et de la méthode des quadripôles sont presque confondues.

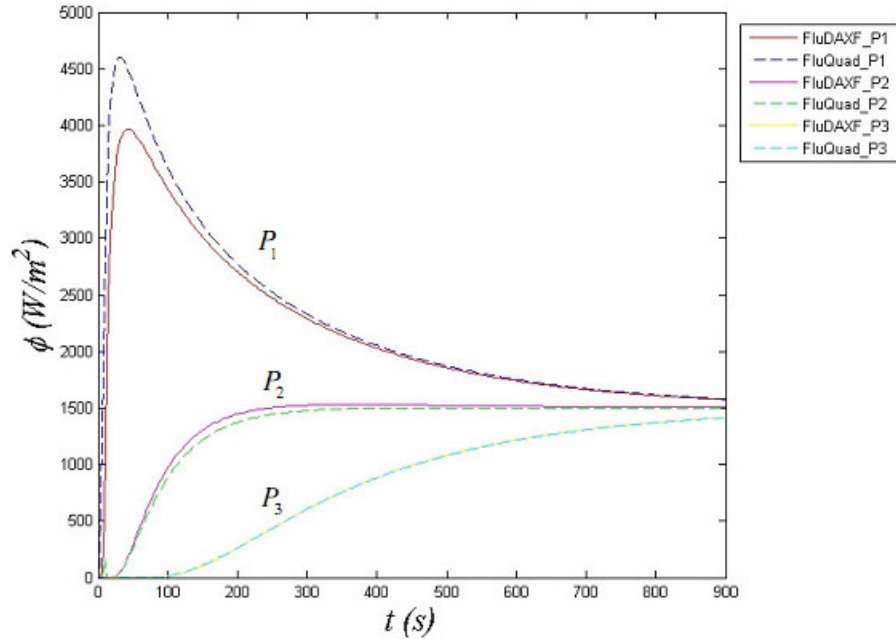


Figure 3.39: Evolutions de densité de flux en trois points P_1 , P_2 et P_3

3.3. Conclusion

Dans ce chapitre, les premières idées du couplage des deux méthodes DAR et X-FEM sont présentées à travers le cas unidimensionnel d'un assemblage brasé. En partant du même point essentiel qui consiste à modéliser les problèmes contenant des singularités, ces deux méthodes convergent vers une même piste. Les solutions obtenues par la méthode des DAR donnent des informations nécessaires pour construire la partie enrichie dans le cadre de la X-FEM.

Dans la première partie du chapitre, nous avons proposé deux méthodes différentes pour le couplage: la méthode relative aux fonctions enrichies et la méthode relative aux paramètres d'enrichissement. Pour la méthode relative aux fonctions enrichies, tous les termes extérieurs et intérieurs des DAR sont calculés et exploités pour construire les fonctions enrichies de la X-FEM. Le fonctionnement de cette méthode est présenté au travers de quatre variantes d'enrichissement différentes pour le problème mécanique de traction simple. L'exactitude des résultats obtenus par le couplage DAR-X-FEM est évaluée en les comparant avec la solution du modèle analytique comprenant les trois couches. Pour le cas unidimensionnel, la méthode relative aux fonctions enrichies montre une excellente concordance avec le modèle analytique. Cependant, un des inconvénients de cette méthode est d'exiger de connaître la forme analytique de tous les termes des DAR pour construire les fonctions enrichies de la X-FEM. Par conséquent, la construction

des fonctions enrichies devient très compliquée une fois que les données du problème changent et même impossible pour les cas multidimensionnels. Heureusement, cet inconvénient peut être résolu par la deuxième méthode: méthode relative aux paramètres d'enrichissement. Pour cette méthode qui est présentée à travers la cinquième variante d'enrichissement, au lieu de construire les fonctions enrichies, nous utilisons la fonction de type Heaviside qui est utilisée pour le problème de fissure. En plus, nous exploitons le saut du déplacement obtenu par les DAR pour imposer des conditions aux limites particulières sur les paramètres d'enrichissement. En utilisant la fonction signe standard, le modèle extérieur, où le joint est remplacé par une interface et une discontinuité du déplacement, est reproduit parfaitement. Dans le cas où la géométrie du joint est conservée (modèle de trois couches), la fonction signe standard peut être remplacée par la fonction Heaviside régularisée pour obtenir le meilleur résultat. La capacité de mise en œuvre de la méthode relative aux paramètres d'enrichissement est largement faisable pour les cas multidimensionnels.

Dans la deuxième partie du chapitre, le couplage DAR-X-FEM est appliqué pour le problème de conduction thermique en régime transitoire. Le problème étudié étant unidimensionnel, nous pouvons appliquer la meilleure variante d'enrichissement de la méthode relative aux fonctions enrichies. Les profils de température aux différents moments ainsi que les évolutions de température et de densité de flux sont calculés. La méthode des quadripôles thermiques est choisie pour valider le couplage DAR-X-FEM. Les résultats du couplage DAR-X-FEM et de la méthode des quadripôles présentent un bon accord, notamment pour les températures quand le modèle tend vers le régime permanent.

Les résultats très prometteurs dans ce chapitre nous encouragent à continuer à étendre le couplage DAR-X-FEM pour le cas bidimensionnel d'un assemblage brasé dans le chapitre suivant.

Bibliographie

Benvenuti, E. (2008). A regularized XFEM framework for embedded cohesive interfaces. *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, **197**, 4367-4378.

Benvenuti, E., Tralli, A. et Ventura, G. (2008). A regularized XFEM model for the transition from continuous to discontinuous displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **74**, 911-944.

De Hoog, F. R., Knight, J. H. et Stokes, A. N. (1982). An improved method for numerical inversion of Laplace transforms. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **3**, 357-366.

Degiovanni, A. (1988). Conduction dans un mur multicouche avec sources: extension de la notion de quadripôle. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **31**, 553-557.

Dolbow, J. (1999). *An extended finite element method with discontinuous enrichment for applied mechanics*. Theoretical and Applied Mechanics, Northwestern University, USA.

Garbai, L., Kroppe, J., Mehes, S. et Bartal, I. (2006). Transient heat conduction in composite systems. *Proceedings of the 4th WSEAS International Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment, Elounda, Greece*, 372-379.

Lazard, M. (2006). Transient thermal behavior of multilayer media: modeling and application to stratified moulds. *Journal of Engineering Physics and Thermophysics*, **79**, 758-767.

Lazard, M. et Corvisier, P. (2004). Modelling of a tool during turning. Analytical prediction of the temperature and of the heat flux at the tool's tip. *Applied Thermal Engineering*, **24**, 839-849.

Leguillon, D. et Abdelmoula, R. (1999). Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint. *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 2651-2672.

Lewis, R. W., Nithiarasu, P. et Seetharamu, K. (2004). *Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow*. Wiley.

Maillet, D., Andre, S., Degiovanni, A., Moyne, C. et Batsale, J. C. (2000). *Thermal Quadripoles : An efficient method for solving the heat equation through integral transforms*. John Wiley and Sons.

Moës, N., Dolbow, J. et Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 131-150.

Nafi, A. (2005). *Etude expérimentale et numérique du comportement mécanique de moules d'injection de plastique obtenus par le procédé de stratoconception*. Université Toulouse III, Albi, France.

Pelissou, C. (2005). *Discrétisation spatio-temporelle du problème thermique à deux champs. Application au procédé de forgeage à chaud*. Mécanique numérique, Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, Paris.

Stehfest, H. (1970). Remarks on Algorithm 368. Numerical Inversion of Laplace Transform. *Communications of the ACM* 13, **13**, 47-49.

Van Dyke, M. (1975). *Perturbation methods in fluid mechanics*. The Parabolic Press, Stanford, California.

Vilums, R. et Buikis, A. (2006). Conservative Averaging Method and its application for one heat conduction problem. *Proceedings of the 4th WSEAS International Conference on Heat Transfer, Thermal Engineering and Environment, Elounda, Greece*, 226-231.

Zienkiewicz, O. C. et Taylor, R. L. (1989). *The Finite Element Method*. McGraw-Hill, London.

Chapitre 4

Couplage DAR et X-FEM pour le cas 2D des
assemblages brasés

Chapitre 4 Couplage DAR et X-FEM pour le cas 2D des assemblages brasés ... 129

4.1.	Position du problème.....	129
4.1.1.	Modèle bidimensionnel de l'assemblage brasé.....	129
4.1.2.	Démarche adoptée pour le couplage DAR-X-FEM dans le cas 2D.....	131
4.1.2.1.	Approche des DAR	132
4.1.2.2.	Implémentation de la X-FEM	134
4.1.2.2.1.	Formulation	134
4.1.2.2.2.	Programmation	135
4.2.	Problème thermique	142
4.2.1.	Calcul général	142
4.2.2.	Applications numériques	146
4.2.2.1.	Cas 1	147
4.2.2.2.	Cas 2	152
4.3.	Problème mécanique	157
4.3.1.	Calcul général	157
4.3.2.	Applications numériques	159
4.3.2.1.	Cas 1	159
4.3.2.2.	Cas 2	167
4.4.	Conclusion.....	174
	Bibliographie.....	176

Chapitre 4

Couplage DAR et X-FEM pour le cas 2D des assemblages brasés

En étendant les résultats du chapitre précédent pour le cas 1D, dans ce chapitre, nous présentons la démarche du couplage DAR-X-FEM appliqué pour le cas 2D de l'assemblage brasé. La meilleure variante, la cinquième, utilisant la méthode sur les paramètres d'enrichissement est mise en œuvre. Les détails des deux étapes principales du couplage DAR-X-FEM sont présentés à travers le principe théorique et la formulation pratique. Nous considérons l'application du couplage DAR-X-FEM pour les deux types de problème: thermique (dont l'inconnue est le champ scalaire de la température) et mécanique (dont l'inconnue est le champ vectoriel du déplacement), pour lesquels plusieurs cas de conditions aux limites sont examinés. Les résultats obtenus par le couplage DAR-X-FEM sont comparés à ceux des calculs des éléments finis standard (à travers les logiciels FlexPDE[®] et ABAQUS).

4.1. Position du problème

4.1.1. Modèle bidimensionnel de l'assemblage brasé

Pour tous les problèmes thermiques et mécaniques présentés dans ce chapitre, nous considérons un modèle bidimensionnel Ω de l'assemblage brasé contenant trois couches: deux substrats Ω^1 et Ω^3 du matériau de base qui sont assemblés par une couche mince Ω^2 — le joint brasé (Figure 4.1). La largeur B est du même ordre de grandeur que l'épaisseur totale L du modèle tandis que l'épaisseur e_j du joint brasé est supposée très petite par rapport à L .

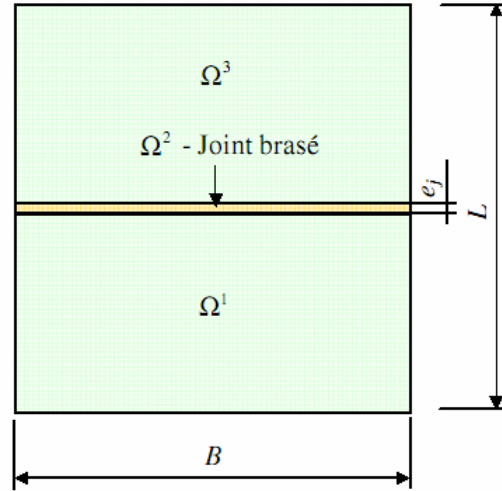


Figure 4.1: Modèle bidimensionnel de l'assemblage brasé

Afin de faire apparaître le petit paramètre caractéristique du problème, nous choisissons l'épaisseur totale L de tout l'assemblage comme la dimension de référence. Autrement dit, on a appliqué une homothétie de rapport $\frac{1}{L}$ sur le modèle physique dans la Figure 4.1 pour obtenir le modèle adimensionnel équivalent présenté dans la Figure 4.2.

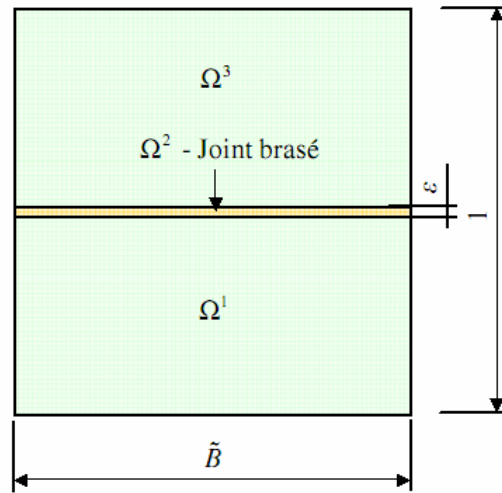


Figure 4.2: Modèle adimensionnel de l'assemblage brasé

L'épaisseur du joint et la largeur totale du modèle adimensionnel sont définies par:

$$\begin{cases} \varepsilon = \frac{e_j}{L} \\ \tilde{B} = \frac{B}{L} \end{cases} \quad (4.1)$$

Comme l'épaisseur e_j du joint est supposée petite devant l'épaisseur totale L de tout l'assemblage, l'épaisseur adimensionnelle ε devient naturellement le petit paramètre présentant l'influence du joint dans l'assemblage.

Le modèle bidimensionnel de l'assemblage traité par le couplage DAR-X-FEM est obtenu à partir du modèle adimensionnel présenté ci-dessus en "écrasant" le joint brasé Ω^2 en une interface commune Γ^{13} entre deux substrats Ω^1 et Ω^3 . L'espace est doté d'une base de coordonnées (x_1, x_2) dont l'origine se situe au milieu de l'interface Γ^{13} (Figure 4.3). Le modèle du couplage DAR-X-FEM est alors équivalent à celui du développement extérieur des DAR. Autrement dit, on s'intéresse au comportement global de l'assemblage brasé en tenant compte de l'influence du joint et en négligeant le comportement local à l'intérieur du joint.

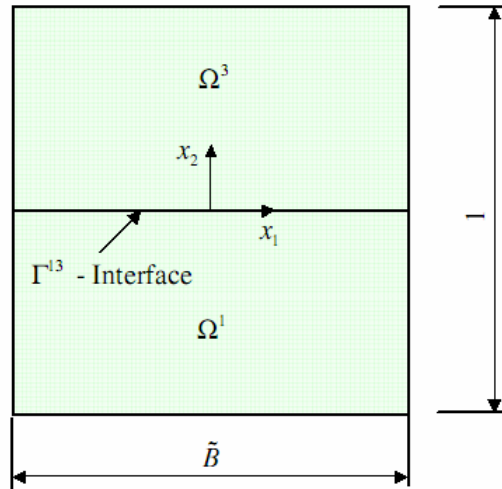


Figure 4.3: Modèle traité par le couplage DAR-X-FEM

4.1.2. Démarche adoptée pour le couplage DAR-X-FEM dans le cas 2D

En se basant sur l'idée fondamentale du couplage DAR-X-FEM pour le cas unidimensionnel présentée dans le chapitre précédent, nous présentons ci-dessous les deux étapes principales de la démarche adoptée pour le couplage DAR-X-FEM dans le cas bidimensionnel de l'assemblage brasé:

4.1.2.1. Approche des DAR

Pour le modèle extérieur des DAR, une fois que le joint est écrasé, son influence sur tout l'assemblage brasé est remplacée par une fonction des termes de correction extérieurs et bien évidemment du petit paramètre ε . Le but de cette étape est d'évaluer approximativement par le calcul analytique et numérique l'influence du joint sur le comportement global de l'assemblage.

Désignons par d le champ primordial du problème (le champ du déplacement (u_1, u_2) pour le problème mécanique ou le champ de température T pour le problème thermique). La méthode des DAR nous permet d'écrire le développement extérieur de d jusqu'aux deuxièmes termes pour les sous domaines Ω^1 et Ω^3 :

$$d(x_1, x_2) = \begin{cases} d_-^0(x_1, x_2) + \varepsilon d_-^1(x_1, x_2) & \text{pour } \Omega^1 (x_2 < 0) \\ d_+^0(x_1, x_2) + \varepsilon d_+^1(x_1, x_2) & \text{pour } \Omega^3 (x_2 > 0) \end{cases} \quad (4.2)$$

où d_{\mp}^0 sont les termes non-perturbés et d_{\mp}^1 sont les termes de correction extérieurs, "-" pour Ω^1 et "+" pour Ω^3 .

Suivant la définition (4.2), en traversant l'interface Γ^{13} , il est aisé de remarquer que le champ d est discontinu. Cette discontinuité elle-même exprime l'influence du joint sur le comportement global de l'assemblage.

Notons $\llbracket d \rrbracket$ la discontinuité ou le saut de d au travers de Γ^{13} . $\llbracket d \rrbracket$ peut être décomposé en les sauts $\llbracket d^0 \rrbracket$ et $\llbracket d^1 \rrbracket$ des termes d_{\mp}^0 et d_{\mp}^1 à travers de Γ^{13} :

$$\llbracket d \rrbracket = [d_+^0(x_1, 0) + \varepsilon d_+^1(x_1, 0)] - [d_-^0(x_1, 0) + \varepsilon d_-^1(x_1, 0)] = \llbracket d^0 \rrbracket + \varepsilon \llbracket d^1 \rrbracket \quad (4.3)$$

Comme d^0 est la solution du problème non-perturbé, *i.e.* sans l'influence du joint brasé, les termes d_{\mp}^0 satisfont aux conditions de continuité classiques en traversant Γ^{13} :

$$d_+^0(x_1, 0) = d_-^0(x_1, 0) \Rightarrow \llbracket d^0 \rrbracket = 0 \quad (4.4)$$

Le saut $\llbracket d \rrbracket$ ne dépend que du saut $\llbracket d^1 \rrbracket$ des termes de correction d_{\mp}^1 et du petit paramètre ε .

L'équation (4.3) est réécrite comme suit:

$$\llbracket d \rrbracket = \varepsilon \llbracket d^1 \rrbracket \quad (4.5)$$

La détermination du saut $\llbracket d^1 \rrbracket$ n'est pas explicite à partir du problème extérieur des DAR. Il nous faut aborder le problème intérieur des DAR. Cependant, comme on ne prend pas le

comportement local dans le joint, suivant la méthode sur les paramètres d'enrichissement, il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement les termes du développement intérieur, mais seulement les relations entre les termes intérieurs et extérieurs. Le saut $\llbracket d^1 \rrbracket$ est normalement exprimé sous forme d'une fonction des termes non-perturbés d^0_{\mp} . Tous ces calculs sont effectués *analytiquement*. En conséquence, la discontinuité $\llbracket d \rrbracket$ est déterminée en se basant sur les connaissances de la solution non-perturbée d^0 . Dans le cas bidimensionnel, en résolvant le problème extérieur avec la condition classique de continuité au travers de Γ^{13} , d^0 peut être obtenue *numériquement* par un code de calcul éléments finis classiques. Dans cette étude, nous avons choisi d'utiliser le logiciel FlexPDE® en raison de sa performance pour la résolution des systèmes d'équations aux dérivées partielles des problèmes multi-physiques (mécanique, thermique, électrique ...) et sa facilité à mettre en œuvre un programme de calcul. Un schéma des sous-étapes de l'approche des DAR est présenté sur la Figure 4.4.

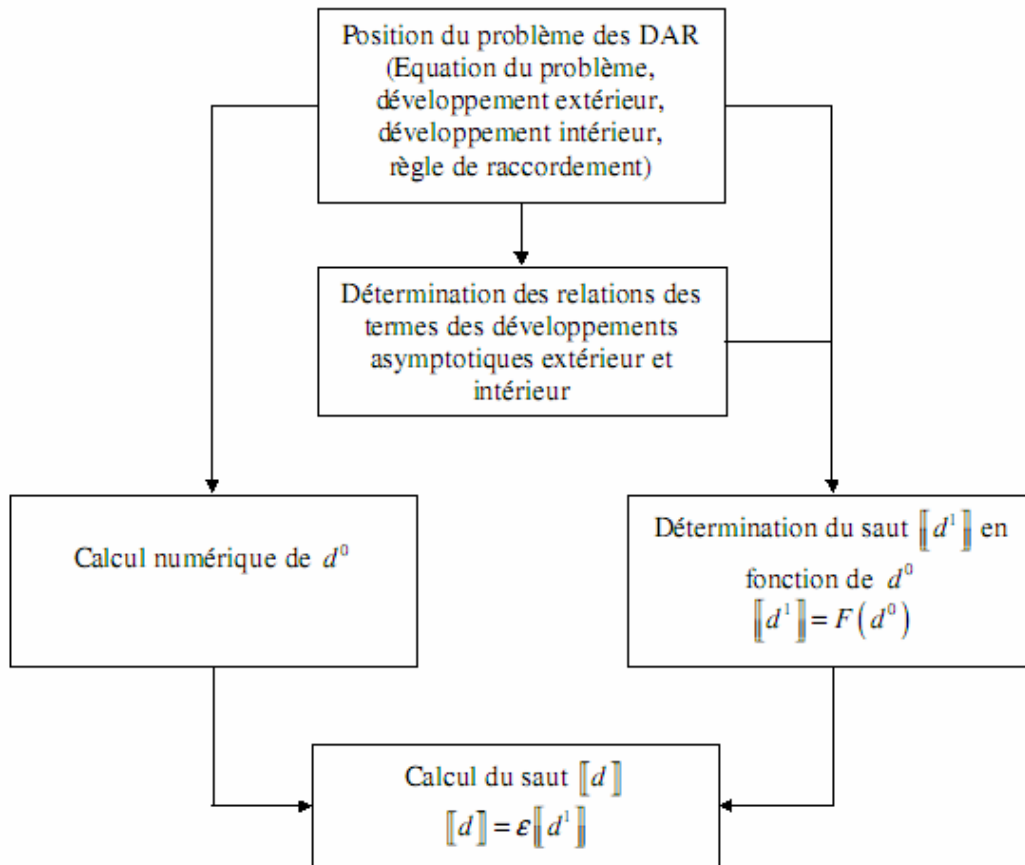


Figure 4.4: Schéma des sous-étapes de l'approche des DAR

4.1.2.2. Implémentation de la X-FEM

4.1.2.2.1. Formulation

Comme pour le cas unidimensionnel de l'assemblage brasé, la formulation de la X-FEM du champ d pour le cas bidimensionnel est donnée par:

$$d^h(x) = \sum_{i=1}^{Nn} N_i(x) d_i + \sum_{j=1}^{Nenr} N_j(x) \psi(x) a_j \quad (4.6)$$

où $x = (x_1, x_2)$ est le vecteur des coordonnées, d_i et a_j sont soit les valeurs nodales soit les vecteurs nodaux selon la nature du problème considéré. L'ensemble des $Nenr$ nœuds enrichis contient tous les nœuds dont le support est intersecté par l'interface Γ^{l3} . Pour cette étude, on utilise le maillage uniforme dont les éléments sont rectangulaires. Les nœuds enrichis qui sont marqués par des carrés en rouge se situent en deux lignes, l'une appartient à Ω^1 et l'autre fait partie de Ω^3 (Figure 4.5).

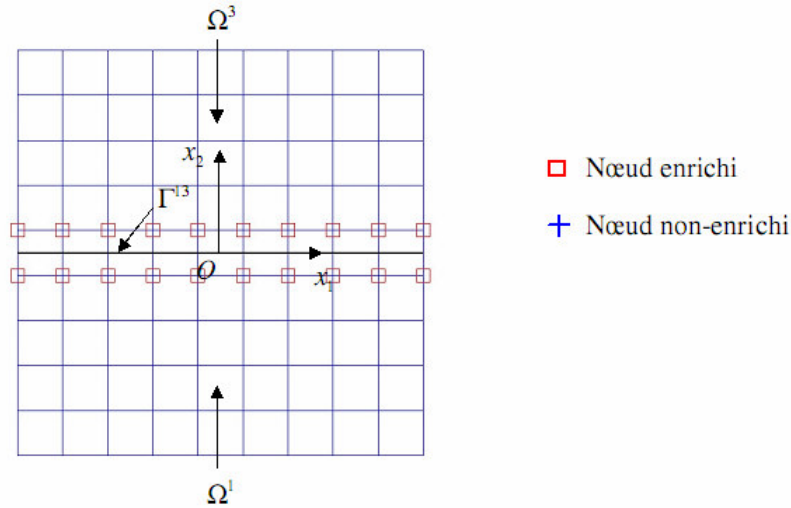


Figure 4.5: Maillage uniforme avec des noeuds enrichis

Comme nous l'avons précisé dans le chapitre précédent, pour le cas bidimensionnel, seule la cinquième variante d'enrichissement basée sur la méthode sur les paramètres d'enrichissement peut être appliquée. Pour cette variante, la fonction de signe $H(x)$ est choisie comme fonction enrichie. En retenant l'interface de singularité Γ^{l3} comme l'interface de discontinuité et en remarquant que Γ^{l3} coïncide avec l'axe Ox_1 (en correspondant à $x_2 = 0$), la fonction de signe $H(x)$ est définie dans ce cas par:

$$H(x) = \begin{cases} -1 & \text{pour } x_2 < 0 \\ 1 & \text{pour } x_2 \geq 0 \end{cases} \quad (4.7)$$

Pour assurer l'interpolation du champ d au nœud enrichi x_j au sens des éléments finis standard, la fonction signe est souvent alternée par la fonction signe modifiée. La partie enrichie disparaît alors aux nœuds. L'approximation (4.6) est réécrite sous la forme suivante:

$$d^h(x) = \sum_{i=1}^{Nn} N_i(x) d_i + \sum_{j=1}^{Nenr} N_j(x) (H(x) - H(x_j)) a_j \quad (4.8)$$

La fonction signe $H(x)$ ne consiste qu'à représenter la discontinuité de d au travers de l'interface Γ^{13} , mais elle ne peut pas contrôler la valeur de cette discontinuité $\llbracket d \rrbracket$. La valeur du saut $\llbracket d \rrbracket$ obtenu par l'étape précédente de l'approche des DAR doit être contrôlée en imposant les conditions aux limites *particulières* aux paramètres d'enrichissement a_j . Le saut $\llbracket d \rrbracket$ est à travers l'interface Γ^{13} (à $x_2 = 0$), il ne dépend donc que de l'abscisse x_1 . Les conditions aux limites imposées aux paramètres d'enrichissement sont données par:

$$a((x_1)_j, (x_2)_j) = \frac{1}{2} \llbracket d \rrbracket ((x_1)_j) \quad (4.9)$$

où $((x_1)_j, (x_2)_j)$ sont les coordonnées du nœud j .

On discutera ultérieurement en détail de ces conditions aux limites *particulières* pour les problèmes thermique et mécanique.

4.1.2.2.2. Programmation

En s'appuyant sur les approches algorithmiques de la X-FEM pour l'application des fissures qui sont présentées dans les travaux de (Nguyen, 2005) et de (Mohammadi, 2008), nous présentons en quelques lignes les modules fondamentaux de l'algorithme de la X-FEM appliquée pour le problème de l'assemblage brasé. Cet algorithme est relativement typique et il peut être programmé dans un certain nombre de langages de programmation comme Fortran, C++, Matlab, ... Dans cette étude, nous avons exploité des routines Matlab, compilées par (Nguyen, 2006), destinées au problème de fissures.

Comme la X-FEM est développée en conservant des caractéristiques fondamentales de la FEM standard, son algorithme doit aussi hériter des modules de base d'un code de calcul de la FEM. Les programmes de la FEM en général et les routines Matlab servant à la FEM en particulier sont

déjà développés par un certain nombre d'auteurs. Les lecteurs peuvent se référer aux travaux de (Kwon, 1997), (Alberty, 1999), (Chessa, 2002), (Quek, 2003), (Legay, 2007) et (Fish, 2007). Nous pouvons largement exploiter et modifier quelques modules de ces programmes pour les adapter à la programmation de la X-FEM.

Maintenant, nous allons proposer les modules principaux de l'algorithme de la X-FEM appliquée au problème mécanique de l'assemblage brasé. L'algorithme destiné à l'application de la X-FEM au problème thermique peut être déduit de façon identique.

Définition du modèle

- Définir les frontières et la géométrie du modèle physique
- Définir le cas échéant les différentes zones du modèle pour lesquelles les différentes tailles d'élément sont utilisées
- Négliger la présence de la singularité

Dans notre cas, le joint brasé est dégénéré en une interface qui peut être appelée *l'interface de singularité*.

- Définir le type du comportement (élastique linéaire isotrope par exemple) et les propriétés des matériaux du modèle
- Définir les conditions aux limites du problème

Génération du maillage

- Générer le maillage des éléments finis

Le maillage structuré peut être obtenu directement par une sous-routine Matlab tandis que le maillage non-structuré est souvent généré par un générateur de maillage dont Gmsh (Remacle, 1998) est un exemple. Dans notre travail, nous n'utilisons que le maillage structuré uniforme.

Le maillage consiste en l'ensemble des nœuds et des éléments qui relient ces nœuds selon un règlement défini. Les coordonnées des nœuds peuvent être *stockées* dans une matrice de dimensions $Nn \times sdim$ où Nn est le nombre des nœuds et $sdim$ est le nombre de dimension spatiale. Par exemple, pour le cas 2D, $sdim = 2$ et nous avons la matrice 'Noeuds' comme suit:

$$\text{Noeuds} = \begin{bmatrix} (x_1)_1 & (x_2)_1 \\ (x_1)_2 & (x_2)_2 \\ \dots & \dots \\ (x_1)_i & (x_2)_i \\ \dots & \dots \\ (x_1)_{Nn} & (x_2)_{Nn} \end{bmatrix}_{Nn \times 2} \quad (4.10)$$

Les éléments du maillage sont définis par une matrice de connectivités qui présente la numérotation des nœuds pour chaque élément. La taille de cette matrice est de $Nelem \times nn$ où $Nelem$ est le nombre des éléments et nn est le nombre des nœuds par un élément. Par exemple, la matrice 'Eléments' d'un maillage de 361 quadrangles linéaires, ($nn = 4$) peut être sous la forme suivante:

$$\text{Eléments} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 22 & 21 \\ 2 & 3 & 23 & 22 \\ 3 & 4 & 24 & 23 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 379 & 380 & 400 & 399 \end{bmatrix}_{361 \times 4} \quad (4.11)$$

Il faut noter que toutes les connectivités sont classées selon le sens anti-horaire pourvu que la matrice jacobienne soit positive.

La génération du maillage est effectuée sans tenir compte de la présence de l'interface de singularité. Ensuite, le type d'élément est aussi défini dans ce module.

Les deux types d'éléments, linéaire et d'ordre supérieur, peuvent être utilisés. Cependant, dans notre cas, les éléments linéaires sont acceptables au niveau de la précision d'une part et plus pratiques et réalisables d'autre part.

Représentation de l'interface de singularité

- Représentation explicite ou implicite

L'interface de singularité peut être représentée explicitement par sa géométrie (le cas de cette étude) ou implicitement par une fonction de niveau (dans le cas où la géométrie de l'interface est compliquée et relativement arbitraire). Nous pouvons trouver l'application de la fonction de niveau pour capturer la position des singularités dans les références de (Sukumar *et al.*, 2000) et (Stolarska, 2001).

Détection de l'enrichissement

- Détecter des nœuds ou des éléments enrichis

Pour la stratégie d'enrichissement utilisant la fonction signe $H(x)$, la partie enrichie s'annule automatiquement à l'extérieur des éléments intersectés par l'interface de singularité. Autrement dit, seuls les nœuds des éléments contenant l'interface sont enrichis, il n'existe pas de domaine de transition entre la zone enrichie et la zone standard.

- Mettre à jour les degrés de liberté ajoutés (paramètres d'enrichissement a_j) en tenant compte des nœuds enrichis.

Définition des fonctions enrichies

- Définir les fonctions enrichies

Dans ce travail, seule la fonction de signe $H(x)$ (cf. l'équation (4.7)) est utilisée.

- Evaluer les dérivées de la fonction enrichie

Pour la fonction de signe $H(x)$, ses dérivées sont données par:

$$\begin{cases} H_{,x_1} = 0 \\ H_{,x_2} = 0 \end{cases} \quad (4.12)$$

Calcul des opérateurs des éléments finis

- Calculer la matrice d'élasticité

Selon les cas de déformation plane ou de contrainte plane, la matrice d'élasticité $[D]$ est calculée à partir du module d'Young E et du coefficient de Poisson ν par les formules suivantes:

Contrainte plane:

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

Déformation plane:

$$[D] = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0.5-\nu \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

- Evaluer la matrice des gradients $[B]$

La matrice des gradients $[B]$ est définie différemment pour les éléments standards et les éléments enrichis:

$$[B] = \begin{cases} [B^0] & \text{pour les éléments standard} \\ \begin{bmatrix} [B^0] & [B^e] \end{bmatrix} & \text{pour les éléments enrichis} \end{cases} \quad (4.15)$$

où $[B^0], [B^e]$ sont respectivement les parties standard et enrichie.

Les parties $[B^0]_i, [B^e]_i$ sont évaluées à un point i par:

$$[B^0]_i = \begin{bmatrix} N_{i,x_1} & 0 \\ 0 & N_{i,x_2} \\ N_{i,x_2} & N_{i,x_1} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

et

$$[B^e]_i = \begin{bmatrix} (N_i H)_{,x_1} & 0 \\ 0 & (N_i H)_{,x_2} \\ (N_i H)_{,x_2} & (N_i H)_{,x_1} \end{bmatrix} \quad (4.17)$$

Dans le cas où la fonction $H(x)$ est remplacée par la fonction signe modifiée en respectant l'interpolation aux nœuds, l'équation (4.17) est réécrite:

$$[B^e]_i = \begin{bmatrix} [N_i (H - H(x_i))]_{,x_1} & 0 \\ 0 & [N_i (H - H(x_i))]_{,x_2} \\ [N_i (H - H(x_i))]_{,x_2} & [N_i (H - H(x_i))]_{,x_1} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

En tenant compte de (4.12), on peut déduire la forme réduite de la partie enrichie $[B^e]_i$ comme suit:

$$[B^e]_i = \begin{bmatrix} N_{i,x_1} (H - H(x_i)) & 0 \\ 0 & N_{i,x_2} (H - H(x_i)) \\ N_{i,x_2} (H - H(x_i)) & N_{i,x_1} (H - H(x_i)) \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

- Calculer la matrice de rigidité $[K]$

La matrice de rigidité $[K]$ est calculée à partir des matrices $[D]$ et $[B]$ déjà connues par la relation:

$$[K] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (4.20)$$

La formulation (4.20) est évaluée élément par élément et à chaque point d'intégration par la méthode d'intégration numérique de Gauss. Comme nous l'avons abordé dans le chapitre 2, pour les éléments enrichis, la méthode classique de Gauss ne peut pas être utilisée à cause de la présence de l'interface de discontinuité. Afin de surmonter ce problème, il nous faut modifier la méthode de Gauss.

Pour les éléments intersectés par l'interface de singularité, on construit un maillage local des éléments triangulaires entre l'interface et les frontières de ces éléments:

- Déterminer l'intersection entre l'interface de singularité et les frontières de l'élément.
- Ajouter des points sur l'intersection et sur les frontières de l'élément.
- Utiliser une technique de triangulation (la technique de Delaunay par exemple) pour créer les sous-triangles dont les arêtes s'alignent avec l'interface de singularité.
- Définir l'ensemble des points d'intégration de Gauss et leurs poids pour chaque sous-triangle.
- Calculer la fonction sous l'intégrale à chaque point d'intégration de Gauss.
- La solution de l'intégrale est obtenue en faisant la somme des résultats à tous les points de Gauss de l'élément.

Conditions aux limites

Pour les conditions aux limites de type Neumann, le processus consiste bien évidemment à mettre les valeurs imposées directement au vecteur des forces extérieures sans modification du système d'équations. Ici, nous n'abordons que les conditions de type Dirichlet. Les conditions aux limites imposées sur les paramètres d'enrichissement sont traitées de manière identique avec celles sur les inconnues standards. Cette étape consiste à modifier le système d'équations:

$$[K]\{d\} = \{f\} \quad (4.21)$$

en tenant compte de la condition aux limites:

$$d_k = \bar{d}_k \quad (4.22)$$

où $\{d\}$ est le vecteur des inconnues, y compris les paramètres d'enrichissement, $\{f\}$ est le vecteur des forces extérieures, d_k est un composant du vecteur $\{d\}$ dont la valeur est imposée par \bar{d}_k .

Pour le cas 2D mécanique, les composantes du vecteur $\{d\}$ sont souvent classées nœud par nœud en alternant les deux inconnues selon x_1 et x_2 . Les paramètres d'enrichissement sont rangés après les déplacements nodaux. Selon cet arrangement, le vecteur des inconnues $\{d\}$ est sous la forme suivante:

$$\{d\} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}_{N \times 1} = \begin{bmatrix} (u_1)_1 \\ (u_2)_1 \\ (u_1)_2 \\ (u_2)_2 \\ \vdots \\ (u_1)_{Nn} \\ (u_2)_{Nn} \\ (a_1)_1 \\ (a_2)_1 \\ \vdots \\ (a_1)_{Nenr} \\ (a_2)_{Nenr} \end{bmatrix}_{N \times 1} \quad (4.23)$$

où $(u_m)_i$ ($m=1,2; i=1,2,\dots,Nn$) sont les déplacements nodaux, les paramètres d'enrichissement sont notés par $(a_m)_j$ ($m=1,2; j=1,2,\dots,Nenr$) et $N=2(Nn+Nenr)$ est le nombre total des inconnues.

Pour appliquer la condition aux limites (4.22) au système (4.21), il nous faut suivre les deux étapes suivantes:

- Modifier le vecteur des forces $\{f\}$ pour obtenir $\{\tilde{f}\}$ dont les composantes sont données par:

$$\begin{cases} \tilde{f}_k = \bar{d}_k \\ \tilde{f}_p = f_p - K_{pk} \bar{d}_k \text{ avec } p=1\dots N \text{ et } p \neq k \end{cases} \quad (4.24)$$

- Modifier la matrice de rigidité $[K]$ pour obtenir $[\tilde{K}]$ dont les composantes sont calculées par:

$$\begin{cases} \tilde{K}_{kk} = 1 \\ \tilde{K}_{kp} = \tilde{K}_{pk} = 0 \end{cases} \quad \text{avec } p = 1 \dots N \text{ et } p \neq k \quad (4.25)$$

Le système initial (4.21) est transformé en système modifié:

$$[\tilde{K}]\{d\} = \{\tilde{f}\} \quad (4.26)$$

Résolution du système d'équations linéaires

Une fois que les conditions aux limites ont été imposées, le système d'équations linéaires modifié (4.26) peut être résolu facilement à l'aide d'un opérateur prédéfini dans Matlab. Le principe de cet opérateur est basé sur la méthode du pivot de Gauss. La méthode du pivot de Gauss a pour but de transformer un système en un autre système équivalent (ayant les mêmes solutions) qui est triangulaire et est donc facile à résoudre.

Post-traitement

- Calculer les contraintes
- Comparer les résultats avec ceux de FlexPDE[®] et d'ABAQUS.

4.2. Problème thermique

4.2.1. Calcul général

Dans cette section, nous considérons l'application numérique du couplage DAR-X-FEM 2D pour le problème thermique en régime permanent. La géométrie du domaine physique de l'assemblage brasé est présentée dans la Figure 4.1 (Section 4.1.1). La largeur et la longueur totales du domaine sont $B = L = 12.5 \text{ (mm)}$. L'épaisseur du joint brasé est $e_j = 0.1 \text{ (mm)}$. Le domaine adimensionnel équivalent est obtenu en normalisant toutes les dimensions par la longueur totale L . Ce domaine est illustré sur la Figure 4.2 dans la Section 4.1.1 avec les longueurs adimensionnées: $\tilde{B} = \tilde{L} = 1$ et $\varepsilon = \frac{e_j}{L} = \frac{0.1}{12.5} = 0.008$. Pour le calcul du couplage DAR-X-FEM, le

domaine adimensionnel de trois couches ($\Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Omega^3$) est remplacé par le domaine approché de deux couches dans lequel le joint brasé est remplacé par une interface de singularité ($\Omega^1 \cup \Gamma^{13} \cup \Omega^3$) (cf. Figure 4.3).

Au niveau de la composition de l'assemblage brasé, les substrats Ω^1 et Ω^3 sont en acier de l'outil de nuance H11 tandis que le joint brasé Ω^2 est en alliage BNi-2 du nickel. Les valeurs des

conductivités thermiques de l'acier et de l'alliage BNi-2 peuvent être trouvées dans les travaux de (Jiang, 2009). Les conductivités thermiques utilisées dans notre calcul sont $\lambda_1 = \lambda_3 = 15 (W / m.^{\circ}C)$; $\lambda_2 = 26 (W / m.^{\circ}C)$.

L'approche des DAR, dont le calcul est détaillé dans l'annexe A, nous donne le saut des deuxièmes termes extérieurs T_{\pm}^1 du champ de température T :

$$\llbracket T^1 \rrbracket = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_+^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_-^0}{\partial x_2}(x_1, 0) \quad (4.27)$$

où T_{\mp}^0 sont les termes extérieurs non-perturbés dans les substrats $\Omega^1 (-)$ et $\Omega^3 (+)$, respectivement,

$\frac{\partial T_-^0}{\partial x_2}(x_1, 0)$ et $\frac{\partial T_+^0}{\partial x_2}(x_1, 0)$ sont les dérivées partielles de T_-^0 et T_+^0 par rapport à x_2 et elles sont

calculées à l'interface Γ^{13} (à $x_2 = 0$).

Comme nous l'avons précisé dans la section 4.1.2.1, une fois que $\llbracket T^1 \rrbracket$ est connu, nous pouvons déterminer le saut du champ de température $\llbracket T \rrbracket$ en traversant l'interface Γ^{13} par la relation suivante:

$$\llbracket T \rrbracket = \varepsilon \llbracket T^1 \rrbracket \quad (4.28)$$

En tenant compte de (4.27), le saut $\llbracket T \rrbracket$ est donné explicitement par:

$$\llbracket T \rrbracket = \varepsilon \left[\frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_+^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_-^0}{\partial x_2}(x_1, 0) \right] \quad (4.29)$$

Pour obtenir (4.29), il nous faut calculer les termes non-perturbés T_{\mp}^0 et leurs dérivées $\frac{\partial T_{\mp}^0}{\partial x_2}(x_1, 0)$.

Comme T^0 est continue à travers de Γ^{13} , cette étape de calcul peut être effectuée à l'aide du logiciel d'éléments finis standard FlexPDE®. Le maillage non-structuré des triangles qui contient 968 éléments et 2017 nœuds est utilisé (Figure 4.6). Nous pouvons constater que le maillage est conforme à la géométrie de l'interface Γ^{13} .

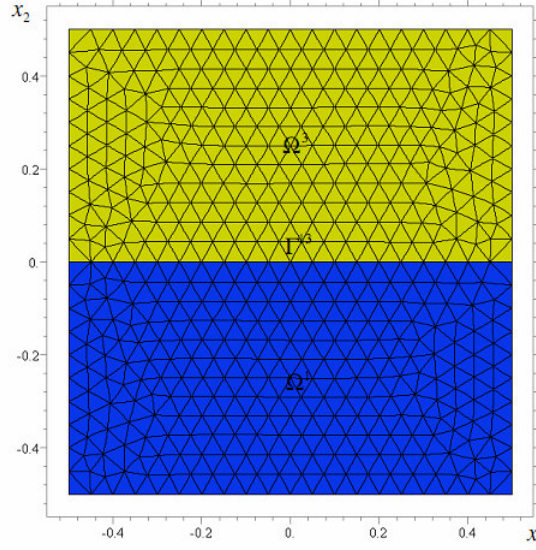


Figure 4.6: Maillage de FlexPDE® pour calculer T^0

Comme nous l'avons précisé dans la section 4.1.2.2, après l'étape de calcul du saut $\llbracket T \rrbracket$ par l'approche des DAR, l'implémentation de la X-FEM pour le problème de température T est programmée dans Matlab. On utilise le maillage structuré des quadrangles contenant 361 éléments et 400 nœuds (Figure 4.7). Le maillage ne doit pas être conforme à la géométrie de l'interface Γ^{13} .

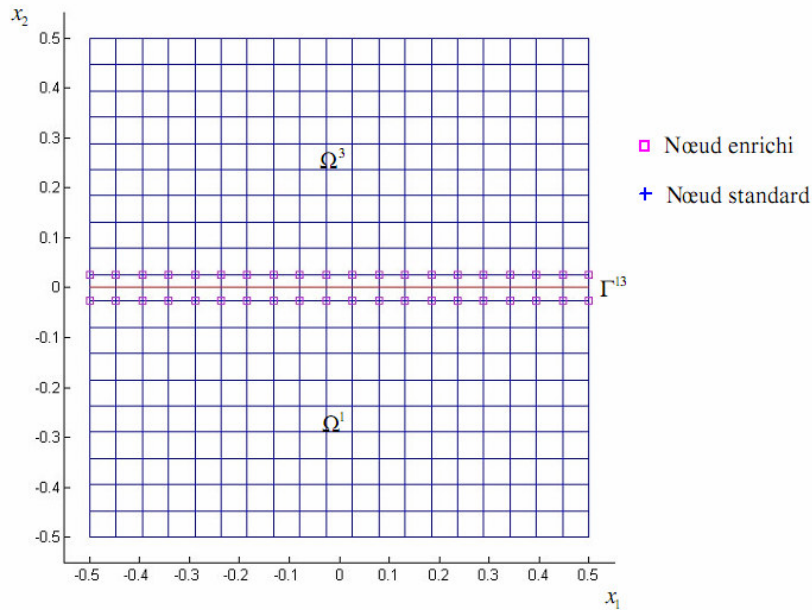


Figure 4.7: Maillage de la X-FEM pour calculer T

Les nœuds des éléments intersectés par l'interface, donc 40 nœuds, sont enrichis. L'enrichissement est assuré par la fonction signe $H(x)$ combinée avec les conditions aux limites imposées sur les paramètres d'enrichissement a_j ($j = 1, 2, \dots, 40$). Selon la numérotation des nœuds du maillage, les numéros des nœuds enrichis sont de 181 à 220. En conséquence, les conditions aux limites imposées sur les paramètres d'enrichissement sont données par:

$$a_{j(1 \rightarrow 40)} = \frac{1}{2} \llbracket T \rrbracket (x_1)_p \quad \text{avec } p = 181 \rightarrow 220 \quad (4.30)$$

La Figure 4.8 présente le schéma des points de Gauss de la méthode d'intégration numérique appliquée pour la X-FEM:

- Pour les éléments standard (non-enrichis): 4 points de Gauss
- Pour les éléments enrichis: chaque élément est divisé en des sous-triangles. Nous utilisons 7 points de Gauss pour chaque sous-triangle.

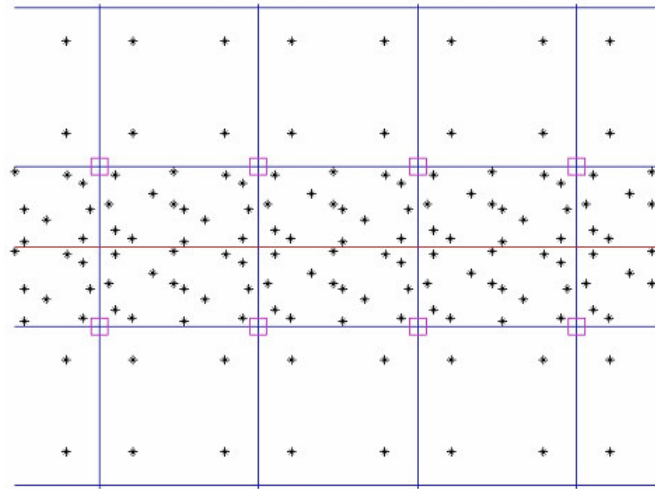


Figure 4.8: Schéma des points de Gauss pour l'intégration numérique de la X-FEM

Le calcul du couplage DAR-X-FEM est comparé avec ceux de FlexPDE[®] et d'ABAQUS. Les modèles calculés dans FlexPDE[®] et ABAQUS consistent en trois couches Ω^1, Ω^2 et Ω^3 . Le maillage des triangles utilisé dans FlexPDE[®] est non-structuré tandis que le calcul par ABAQUS est fait sur le maillage structuré des rectangles. Cependant, les deux logiciels exigent que le maillage soit conforme à la géométrie du joint brasé. Pour le calcul par FlexPDE[®], le maillage est réglé automatiquement par le logiciel en se basant sur la géométrie et les conditions aux limites

imposées (cf. Figure 4.6). Pour le calcul d'ABAQUS, nous avons utilisé un maillage qui coïncide "presque" parfaitement au maillage de la X-FEM, sauf dans la zone autour du joint (Figure 4.9).

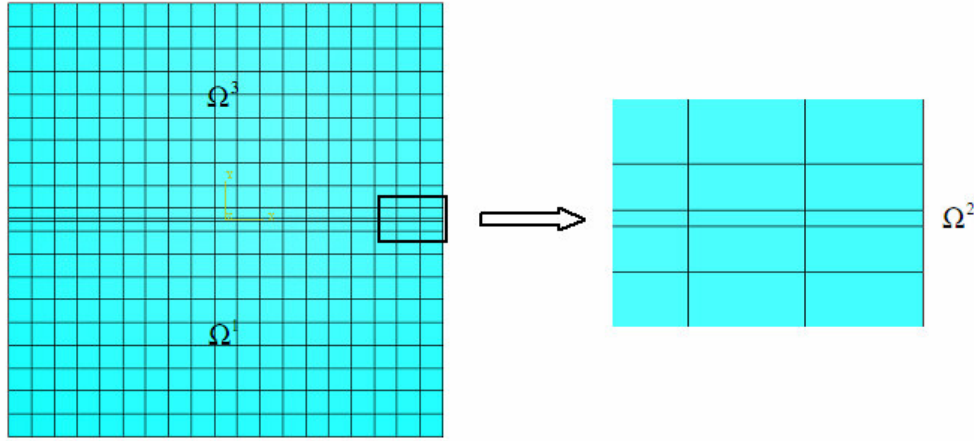


Figure 4.9: Maillage du domaine de trois couches dans ABAQUS

4.2.2. Applications numériques

Nous considérons le problème thermique énoncé dans la section précédente avec deux cas de conditions aux limites. Pour chaque cas, le champs de température calculé par le couplage DAR-X-FEM est comparé avec ceux de FlexPDE[®] et de ABAQUS pour tout domaine. Afin d'évaluer l'exactitude des résultats, nous présenterons les cartes d'erreur de température du couplage DAR-X-FEM versus FlexPDE[®] et du couplage DAR-X-FEM contre ABAQUS. Dans cette étude, on utilise l'erreur relative qui est calculée par la formule:

$$err_i = \frac{|(T_{couplage})_i - (T_{référence})_i|}{(T_{référence})_i} \cdot 100\% \quad (4.31)$$

où err_i est la valeur d'erreur relative au nœud i , $(T_{couplage})_i$ et $(T_{référence})_i$ sont respectivement les températures calculées par le couplage DAR-X-FEM et par un logiciel éléments finis standard (soit FlexPDE[®] soit ABAQUS) au nœud i .

Les températures obtenues par les trois calculs (DAR-X-FEM, FlexPDE[®] et ABAQUS) sont présentées sur les trois sections 1-1, 2-2 et 3-3 dont les coordonnées sont données par:

$$\begin{cases} (x_1)_{\underline{1-1}} = -0.3948 \\ (x_1)_{\underline{2-2}} = 0.1312 \\ (x_2)_{\underline{3-3}} = 0.0789 \end{cases} \quad (4.32)$$

L'emplacement de ces trois sections est montré sur la Figure 4.10 ci-dessous.

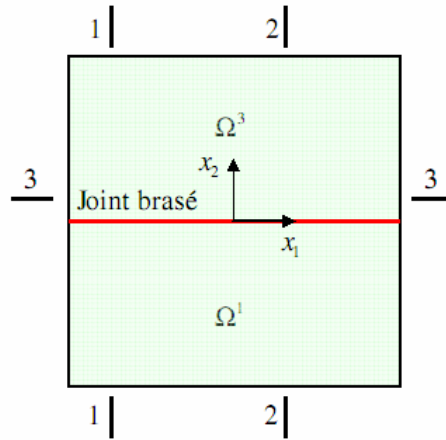


Figure 4.10: Position des trois sections 1-1, 2-2 et 3-3

4.2.2.1. Cas 1

C'est un faux cas 2D parce que la géométrie du modèle est symétrique par rapport à l'axe Ox_2 et les conditions aux limites sont 1D. La température en bas est $T_e = 100^\circ C$ tandis que la température en haut est $T_s = 25^\circ C$. Les deux côtés latéraux sont isolés thermiques (Figure 4.11).

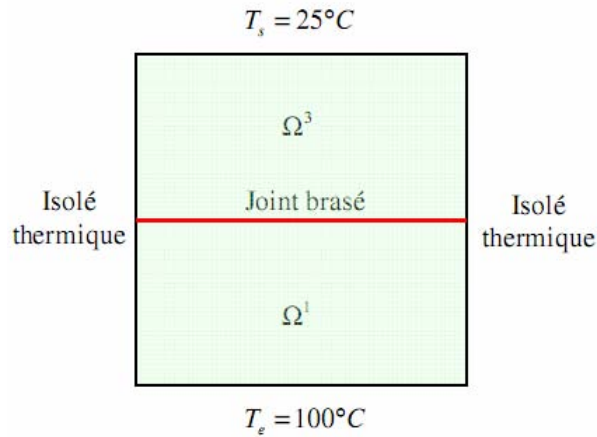
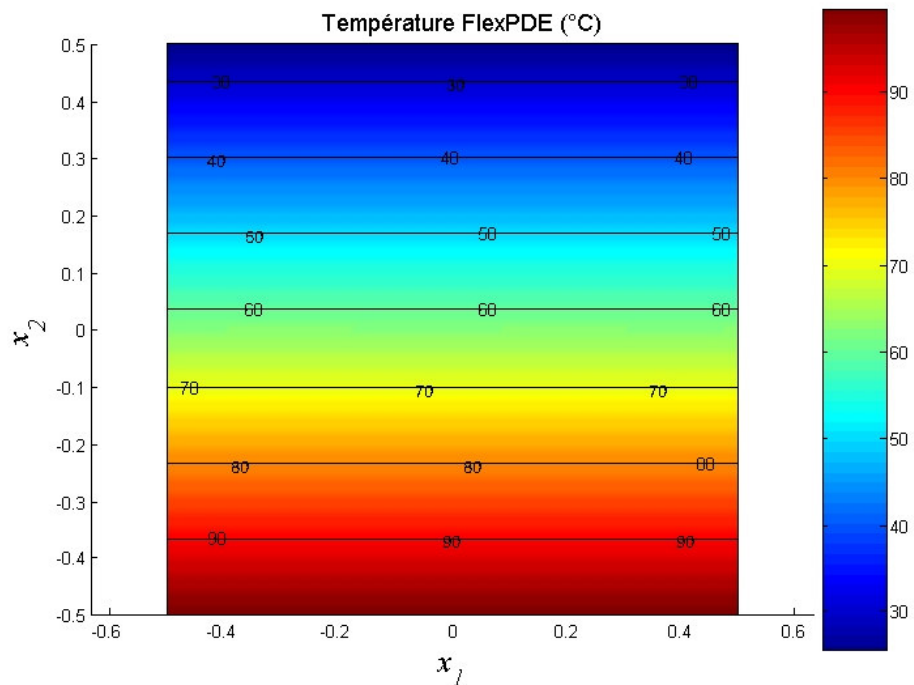
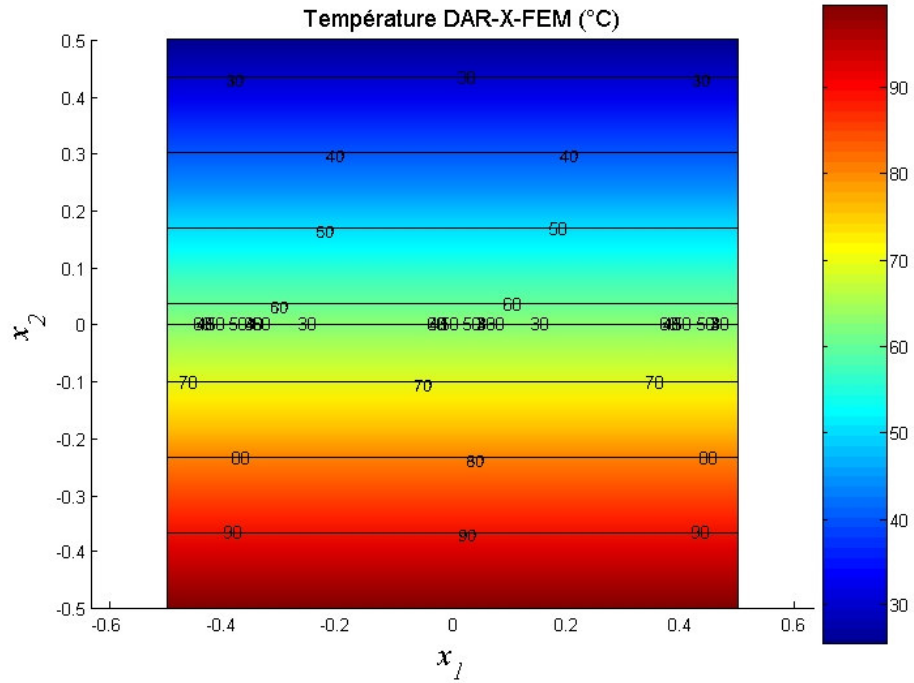


Figure 4.11: Cas 1 des conditions aux limites

Les champs de température obtenus par le couplage DAR-X-FEM, FlexPDE[®] et ABAQUS sont présentés sur la Figure 4.12. La température est linéaire par rapport à x_2 et elle ne dépend pas de x_1 . Nous pouvons constater une bonne similitude entre les trois résultats, sauf à l'interface Γ^{l3} .

Le résultat du couplage DAR-X-FEM présente une discontinuité tandis que ceux de deux logiciels FlexPDE® et ABAQUS sont continus au travers de Γ^{13} . Cela peut être montré plus clairement quand on observe les courbes de température sur les sections 1-1 et 2-2.



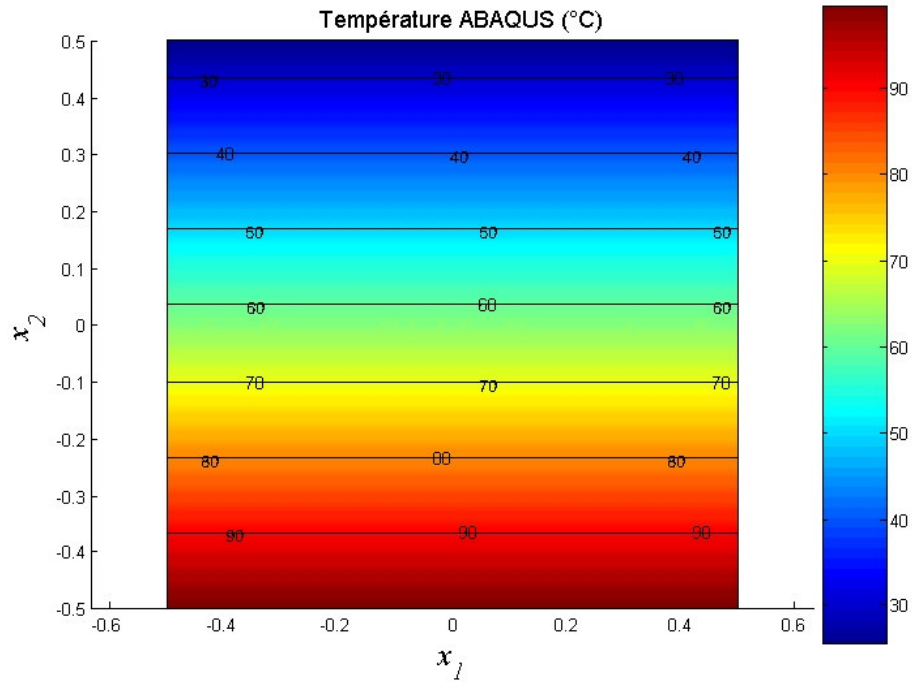


Figure 4.12: Champ de température

La Figure 4.13 ci-dessous présente les courbes de température sur les sections 1-1, 2-2 et 3-3. Pour les sections 1-1 et 2-2 perpendiculaires à l'interface Γ^{13} , le résultat du couplage DAR-X-FEM montre une discontinuité à $x_2 = 0$ tandis que les résultats de FlexPDE[®] et de ABAQUS sont continus. Cependant, à l'extérieur de la géométrie du joint (la couche d'épaisseur ε), les trois courbes sont très proches. Pour la section 3-3, la température est constante suivant l'axe x_1 et la valeur obtenue par le couplage DAR-X-FEM se trouve au milieu de celles des logiciels des éléments finis standard.

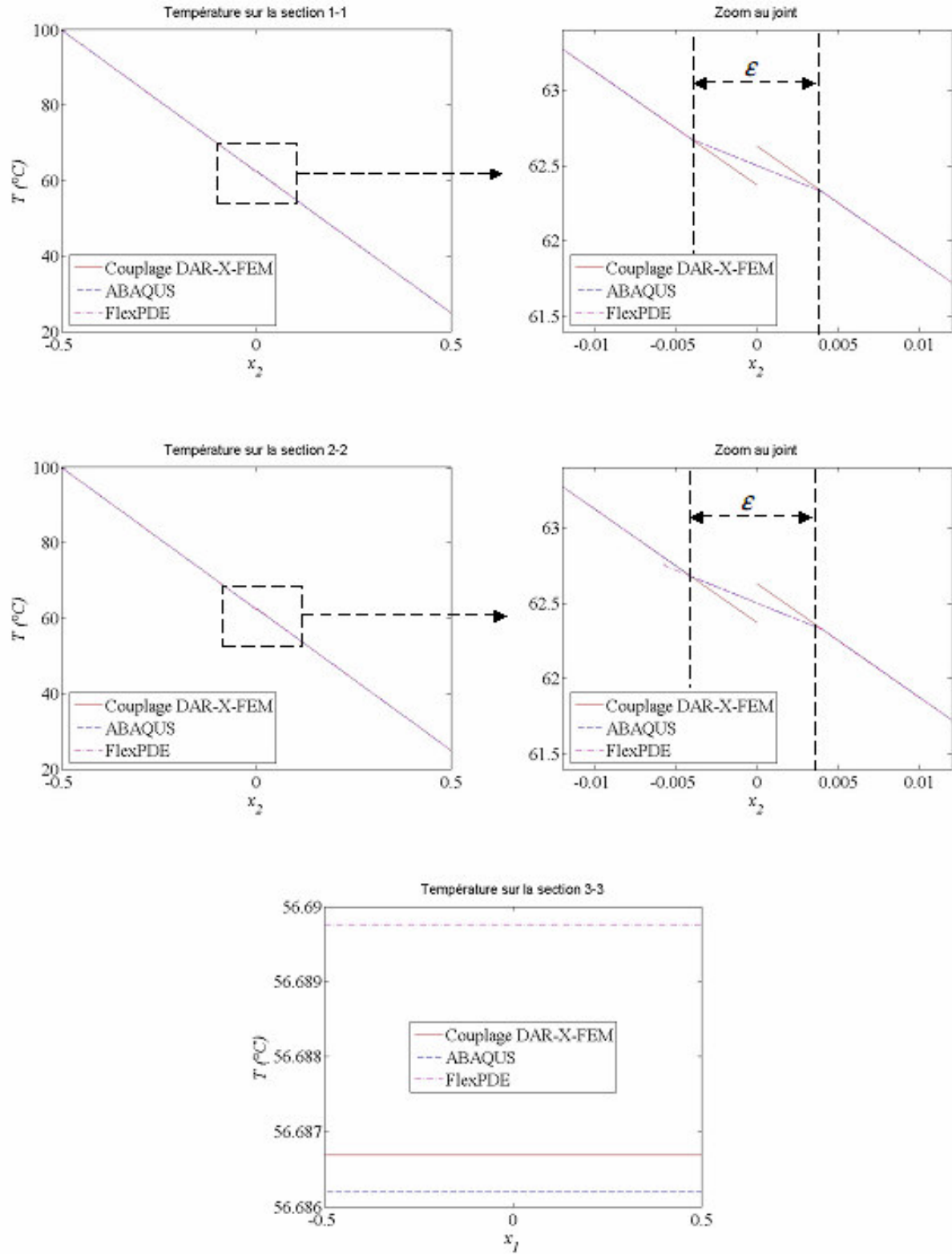


Figure 4.13: Représentation des courbes de température sur les sections

Les cartes d'erreur relative sont présentées sur Figure 4.14. Les erreurs relatives du couplage DAR-X-FEM par rapport à FlexPDE® et à ABAQUS sont extrêmement faibles (de l'ordre de 10^{-4} %) pour tout domaine. Ces résultats pour le cas de test simple contribuent à valider les démarches du couplage DAR-X-FEM 2D.

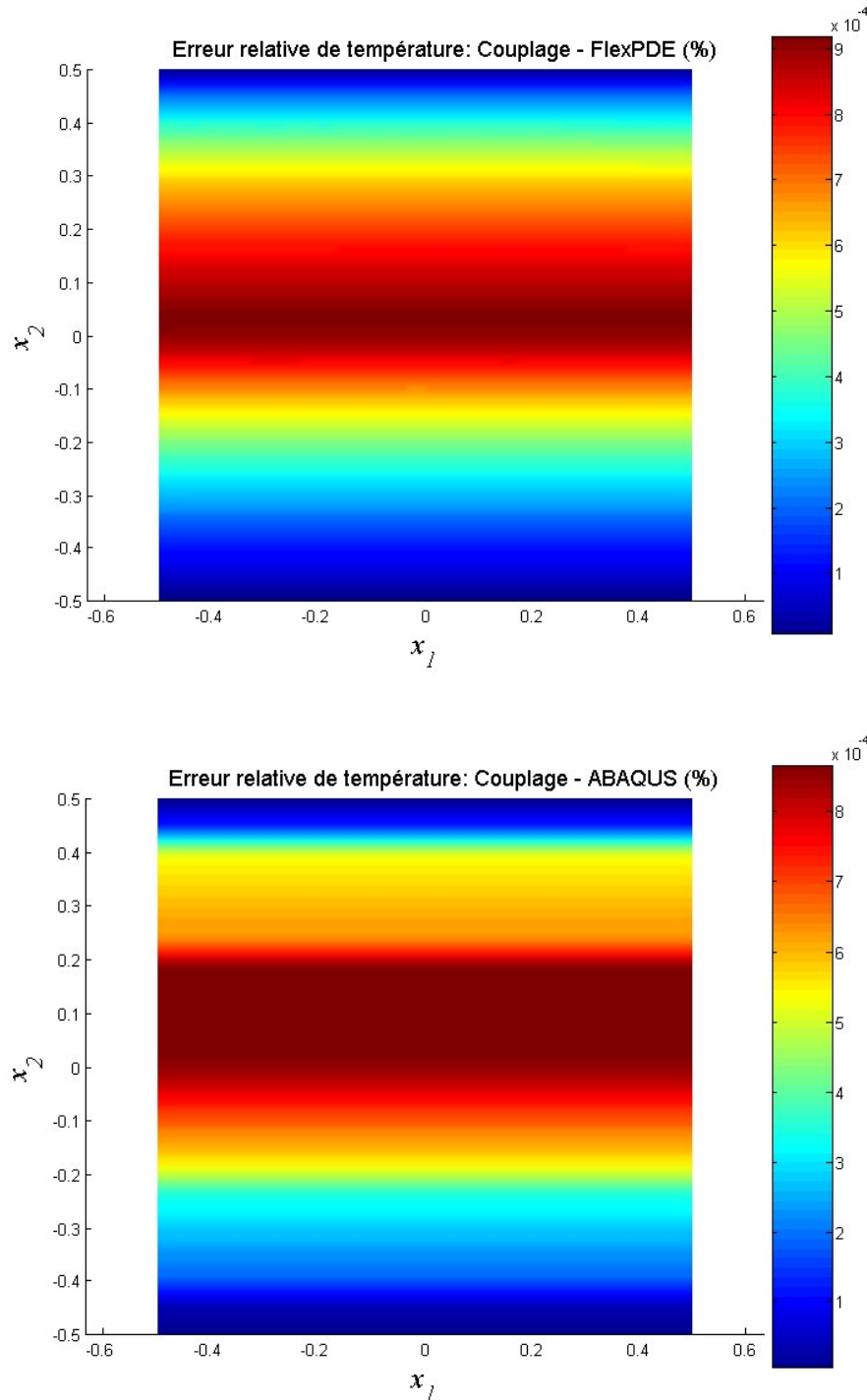


Figure 4.14: Cartes d'erreur relative

4.2.2.2. Cas 2

Maintenant, nous considérons un cas plus complexe au niveau des conditions aux limites. On impose à la fois la température ainsi que le flux. Les températures en bas et en haut sont $T_e = 100^\circ C$ et $T_s = 25^\circ C$, respectivement. Une densité de flux $\phi = 1000 (W / m)$ est imposée sur le côté gauche tandis que le côté droit reste isolé thermiquement (voir Figure 4.15)

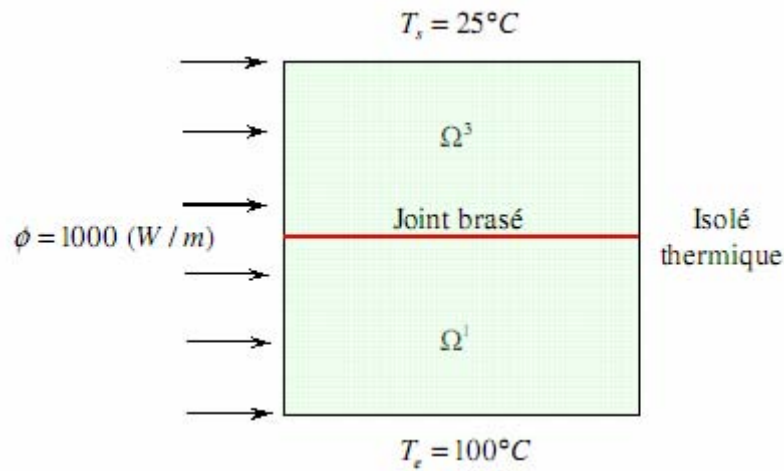
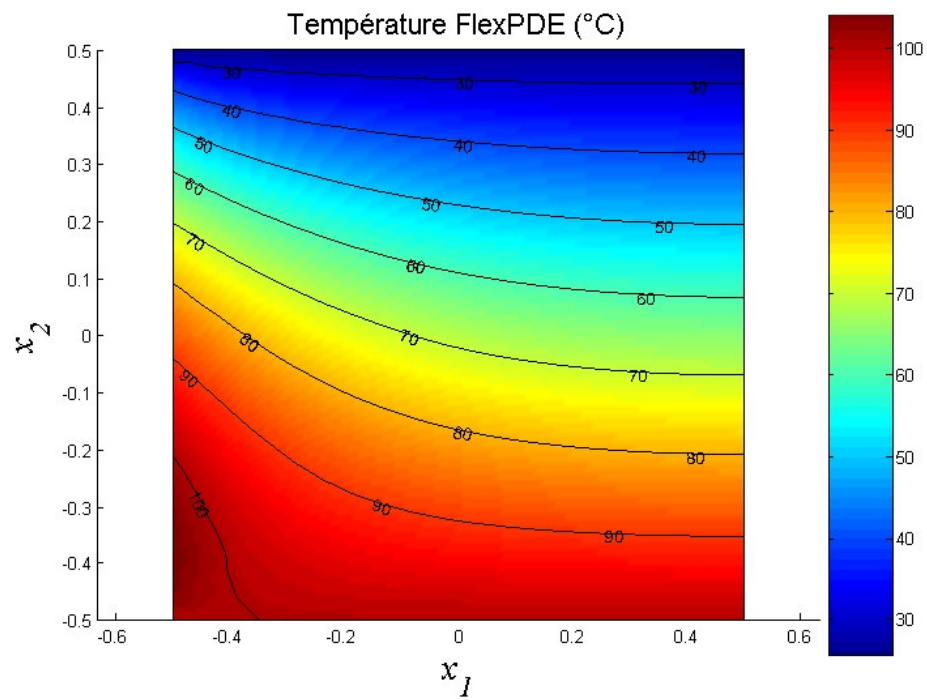
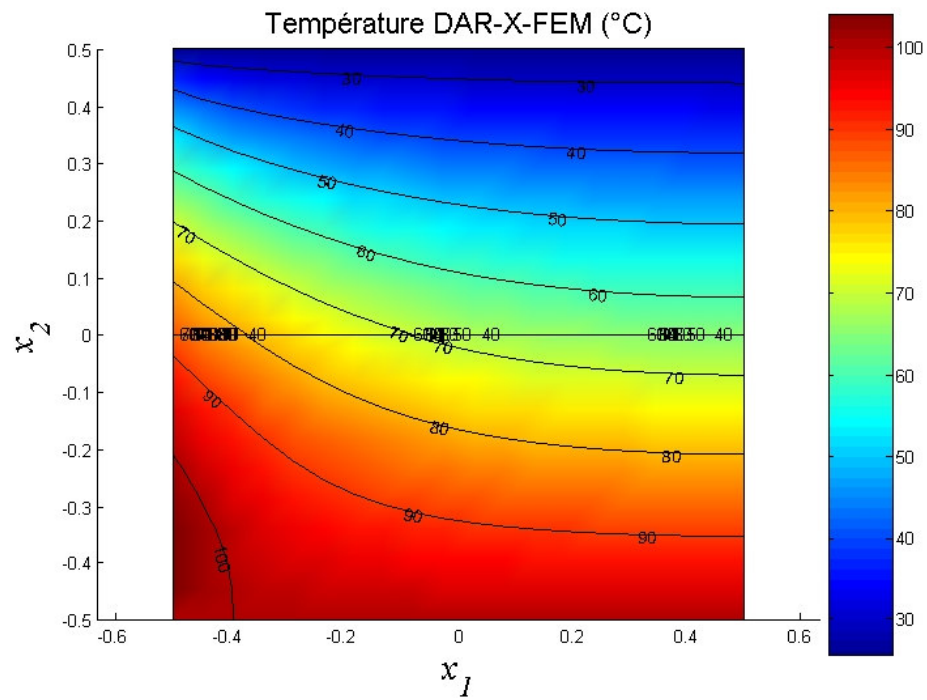


Figure 4.15: Cas 2 des conditions aux limites

La Figure 4.16 illustre les résultats de température (pour tout domaine) obtenus par le couplage DAR-X-FEM, FlexPDE® et ABAQUS. Le couplage DAR-X-FEM semble être en bon accord avec les calculs des éléments finis standard au niveau de la forme des lignes isothermes et ainsi de leurs valeurs.



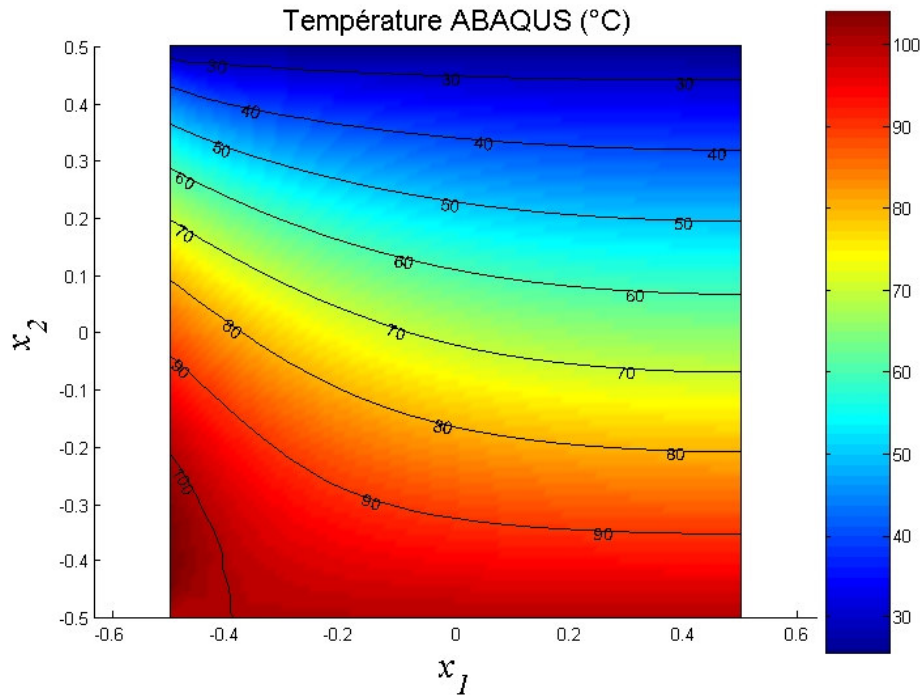


Figure 4.16: Champ de température

Sur la Figure 4.17, la température est présentée pour les trois sections 1-1, 2-2 et 3-3. Globalement, les résultats du couplage DAR-X-FEM sont relativement proches de ceux de FlexPDE[®] et de ABAQUS pour les sections 1-1 et 2-2. Localement, le calcul des éléments finis classiques présente le champ à l'intérieur du joint pour le modèle de trois couches tandis que le couplage DAR-X-FEM capture la discontinuité du champ en traversant l'interface de singularité Γ^{13} du modèle approché de deux couches. Cela explique la différence entre les résultats du couplage et des logiciels des éléments finis standard dans la couche d'épaisseur ε à la position du joint. Pour la section 3-3 parallèle au joint, les trois calculs sont parfaitement cohérents.

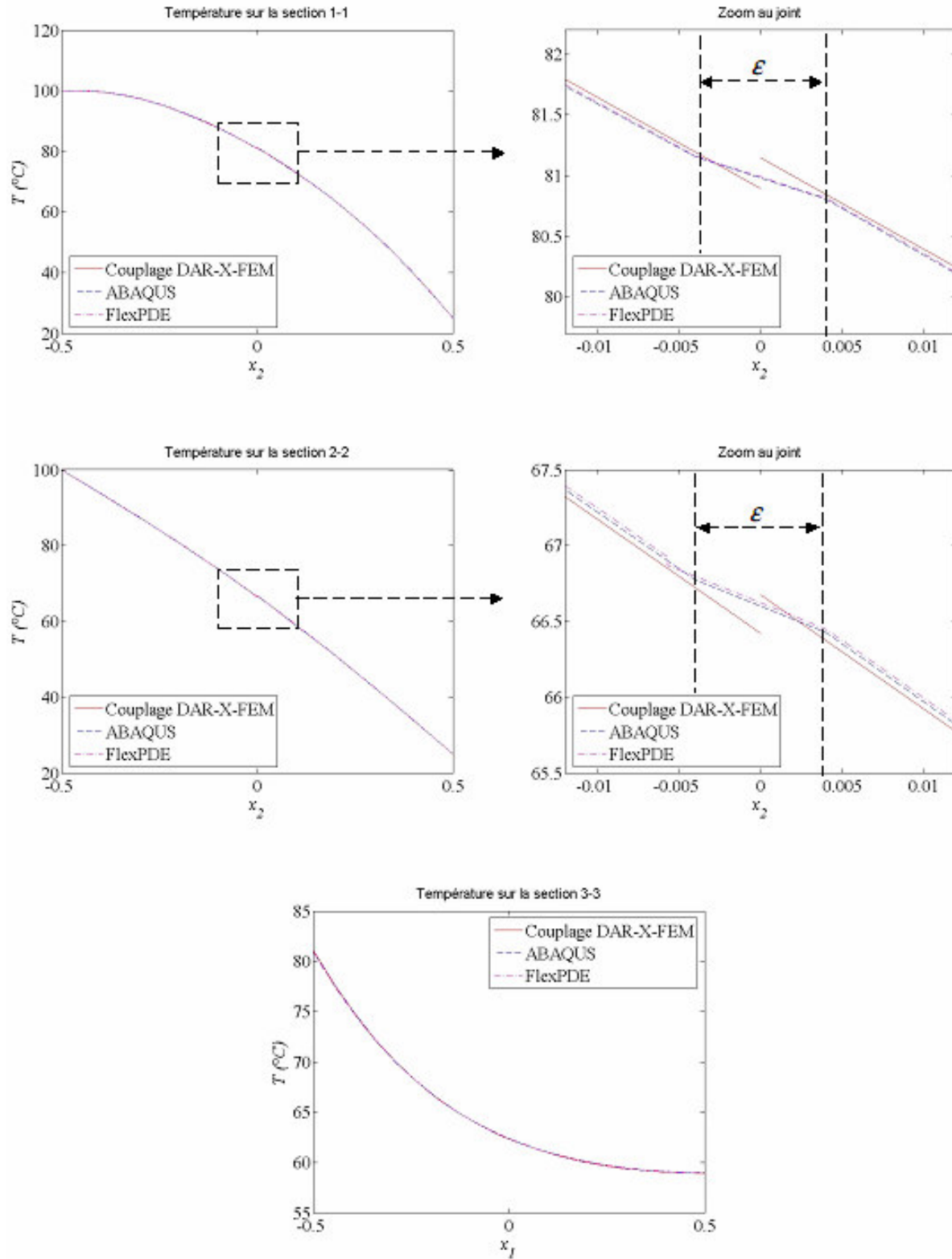


Figure 4.17: Représentation des courbes de température sur les sections

Les cartes d'erreur relative sont présentées sur la Figure 4.18. Les erreurs relatives entre le couplage DAR-X-FEM et les calculs des éléments finis classiques sont relativement faibles (de l'ordre de 0.05%) pour la plupart du domaine. Il existe quelques petites zones du domaine où l'erreur augmente jusqu'à 0.4%. Une de ces zones se trouve au bout de l'interface Γ^{13} connecté avec le flux imposé où l'application du flux sur une petite région crée une perturbation.

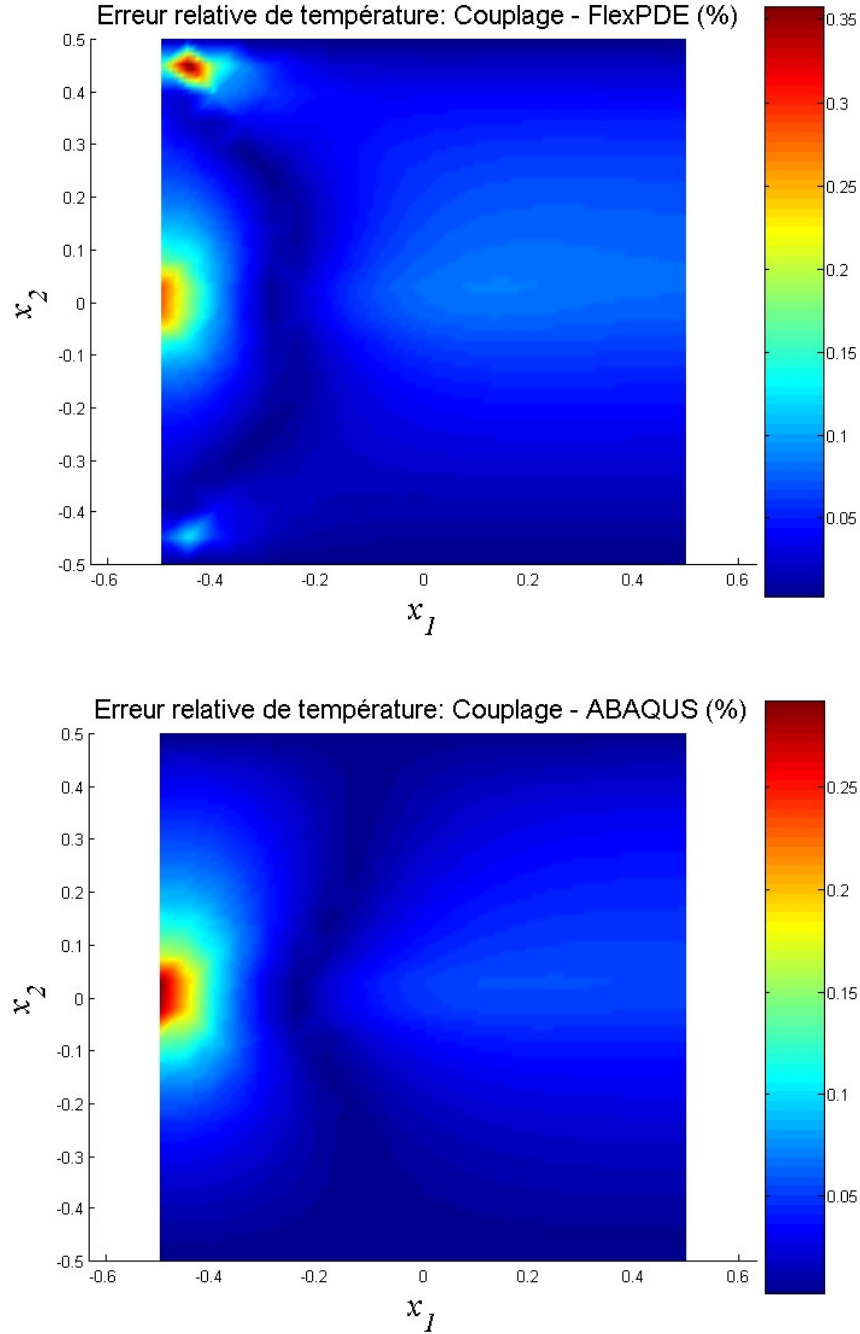


Figure 4.18: Cartes d'erreur relative

4.3. Problème mécanique

4.3.1. Calcul général

Dans cette section, nous considérons l'application du couplage DAR-X-FEM 2D pour le problème mécanique. Nous réutilisons la géométrie du modèle de l'assemblage brasé appliqué pour le problème thermique précédent (voir la Section 4.2). Le matériau de base utilisé pour les substrats Ω^1 et Ω^3 est l'acier. Les modules d'Young et les coefficients de Poisson des substrats Ω^1 et Ω^3 sont donc $E_1 = E_3 = 200000(MPa)$ et $\nu_1 = \nu_3 = 0.3$. Le joint brasé Ω^2 est constitué par l'alliage d'apport CuSil (Ag73%-Cu27%). Le module d'Young et le coefficient de Poisson de cet alliage dans l'assemblage brasé, *i.e.* ses caractéristiques après le brasage, sont donnés dans l'étude de (Nafi, 2005): $E_2 = 74000(MPa)$; $\nu_2 = 0.3$.

Pour tous ces calculs, les matériaux sont supposés élastiques linéaires isotropes et le cas particulier des déformations planes est considéré. En conséquence, les deux coefficients de Lamé sont introduits par les formules suivantes:

$$\begin{cases} \lambda_n^L = \frac{E_n \nu_n}{(1 + \nu_n)(1 - 2\nu_n)} \\ \mu_n = \frac{E_n}{2(1 + \nu_n)} \end{cases} \quad (4.33)$$

où $n = 1, 2$ et 3 correspondent aux sous-domaines Ω^1 , Ω^2 et Ω^3 .

Comme nous l'avons décrit dans la Section 4.1.2.1, pour le problème mécanique, le déplacement u est le champ primordial du problème. Pour le cas 2D, le déplacement est un champ vectoriel de deux composants: $u = \{u_1 \quad u_2\}^T$. Suivant l'approche des DAR, le développement extérieur pour le champ du déplacement u est sous la forme:

$$u = \begin{cases} u_-^0 + \varepsilon u_-^1 = \begin{pmatrix} u_1^{0-} \\ u_2^{0-} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1^{1-} \\ u_2^{1-} \end{pmatrix} & \text{pour } \Omega^1 (x_2 < 0) \\ u_+^0 + \varepsilon u_+^1 = \begin{pmatrix} u_1^{0+} \\ u_2^{0+} \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} u_1^{1+} \\ u_2^{1+} \end{pmatrix} & \text{pour } \Omega^3 (x_2 > 0) \end{cases} \quad (4.34)$$

Notons $\left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\}$ le vecteur de saut du déplacement et $\left\{ \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} \right\}$ le vecteur de saut des deuxièmes

termes extérieurs des DAR au travers de l'interface de singularité Γ^{13} . La relation entre ces deux vecteurs de saut est donnée par:

$$\left\{ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \right\} = \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \end{bmatrix} \right\} \quad (4.35)$$

L'approche des DAR nous fournit les valeurs des sauts $\llbracket u_1^1 \rrbracket$ et $\llbracket u_2^1 \rrbracket$ comme ci-dessous (voir l'annexe A pour le détail des calculs):

$$\left\{ \begin{aligned} \llbracket u_1^1 \rrbracket &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} [u_{1,2}^{0-}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0-}(x_1, 0)] + \frac{\mu_3 - \mu_2}{2\mu_2} [u_{1,2}^{0+}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0+}(x_1, 0)] \\ \llbracket u_2^1 \rrbracket &= \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_1^L - \lambda_2^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0-}(x_1, 0) + \left(\frac{\lambda_1^L + 2\mu_1}{\lambda_2^L + 2\mu_2} - 1 \right) u_{2,2}^{0-}(x_1, 0) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_3^L - \lambda_2^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0+}(x_1, 0) + \left(\frac{\lambda_3^L + 2\mu_3}{\lambda_2^L + 2\mu_2} - 1 \right) u_{2,2}^{0+}(x_1, 0) \right] \end{aligned} \right. \quad (4.36)$$

En remplaçant (4.36) dans (4.35), nous obtenons les sauts des composantes u_1 et u_2 du déplacement:

$$\left\{ \begin{aligned} \llbracket u_1 \rrbracket &= \mathcal{E} \left\{ \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} [u_{1,2}^{0-}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0-}(x_1, 0)] + \frac{\mu_3 - \mu_2}{2\mu_2} [u_{1,2}^{0+}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0+}(x_1, 0)] \right\} \\ \llbracket u_2 \rrbracket &= \mathcal{E} \left\{ \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_1^L - \lambda_2^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0-}(x_1, 0) + \left(\frac{\lambda_1^L + 2\mu_1}{\lambda_2^L + 2\mu_2} - 1 \right) u_{2,2}^{0-}(x_1, 0) \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_3^L - \lambda_2^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0+}(x_1, 0) + \left(\frac{\lambda_3^L + 2\mu_3}{\lambda_2^L + 2\mu_2} - 1 \right) u_{2,2}^{0+}(x_1, 0) \right] \right\} \end{aligned} \right. \quad (4.37)$$

Les maillages de FlexPDE[®] pour calculer les sauts selon (4.37), du couplage DAR-X-FEM et de ABAQUS sont identiques à ceux utilisés pour le problème thermique (cf. la Section 4.2.1).

Désignons $\mathbf{a} = \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}$ le vecteur des paramètres d'enrichissement. Les conditions aux limites

imposées sur ces paramètres sont donc données par:

$$\begin{cases} (a_1)_{j(1 \rightarrow 40)} = \frac{1}{2} \llbracket u_1 \rrbracket (x_1)_p & \text{avec } p = 181 \rightarrow 220 \\ (a_2)_{j(1 \rightarrow 40)} = \frac{1}{2} \llbracket u_2 \rrbracket (x_1)_p & \text{avec } p = 181 \rightarrow 220 \end{cases} \quad (4.38)$$

Tout comme pour le problème thermique, le calcul du couplage DAR-X-FEM est aussi comparé avec ceux de FlexPDE[®] et de ABAQUS pour le problème mécanique.

4.3.2. Applications numériques

Considérons le problème mécanique pour deux cas différents de conditions aux limites. Pour chaque cas, le calcul du couplage DAR-X-FEM est comparé avec ceux des logiciels des éléments finis standard (FlexPDE[®] et ABAQUS). Les résultats comparés consistent en la configuration déformée du maillage et les courbes du déplacement sur les trois sections 1-1, 2-2 et 3-3. La position de ces sections est présentée dans la partie 4.2.2 du problème thermique. En plus, nous présenterons le champ des contraintes et la contrainte équivalent de Von Mises calculés à l'aide du couplage DAR-X-FEM.

4.3.2.1. Cas 1

Considérons le cas du cisaillement pur de l'assemblage brasé (voir la Figure 4.19). Le bas du domaine est encastré ($u_1 = u_2 = 0$). Le côté supérieur est bloqué suivant la direction x_2 ($u_2 = 0$) et sollicité par un déplacement normalisé $\tilde{U}^d = 0.004$ suivant la direction x_1 ($u_1 = \tilde{U}^d$). Les deux côtés latéraux sont libres.

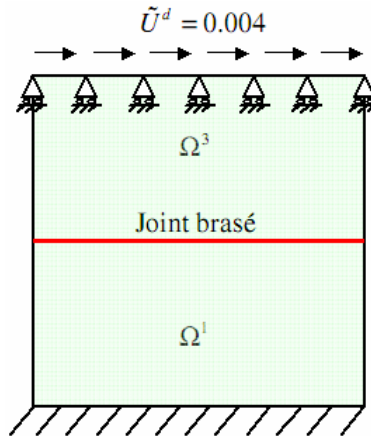


Figure 4.19: Cas du cisaillement pur

Sur la Figure 4.20, les sauts du déplacement $[[u_1]]$ et $[[u_2]]$ calculés par (4.37) sont tracés en fonction de x_1 . La forme du $[[u_1]]$ est symétrique par rapport à la position $x_1 = 0$ tandis que $[[u_2]]$ est presque nul pour la plupart de l'interface, sauf pour un petit tronçon près du bout $x_1 = 0.5$.

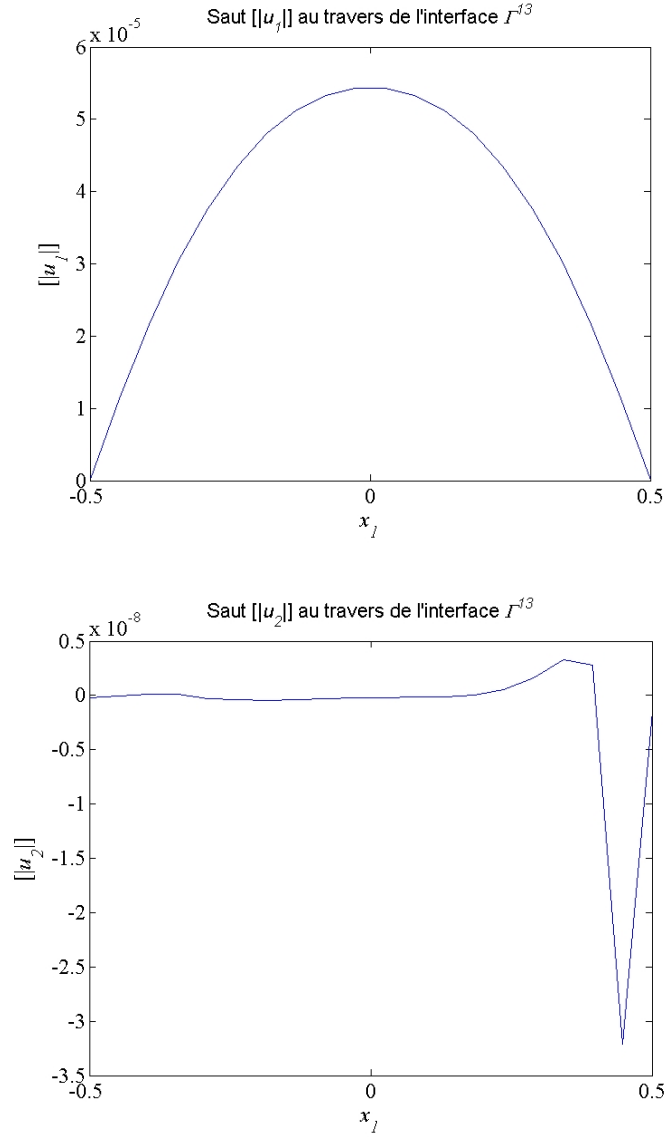
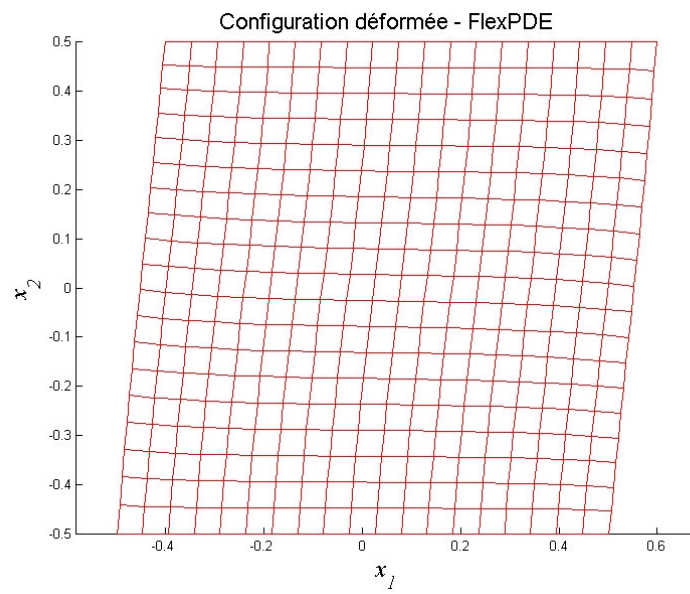
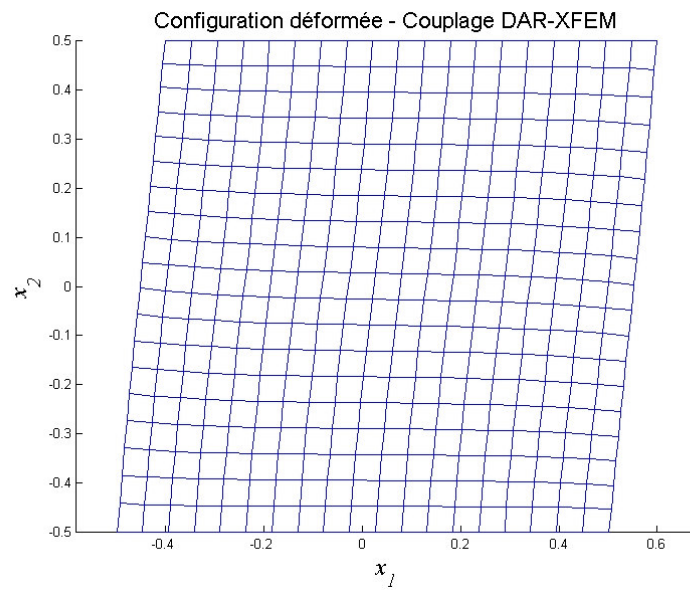


Figure 4.20: Sauts du déplacement en fonction de x_1

Les configurations déformées du maillage en appliquant le facteur de grossissement $f_g = 25$, obtenues par le couplage DAR-X-FEM, FlexPDE[®] et ABAQUS, sont présentées sur la Figure 4.21. Nous pouvons constater une excellente similitude entre les trois configurations.



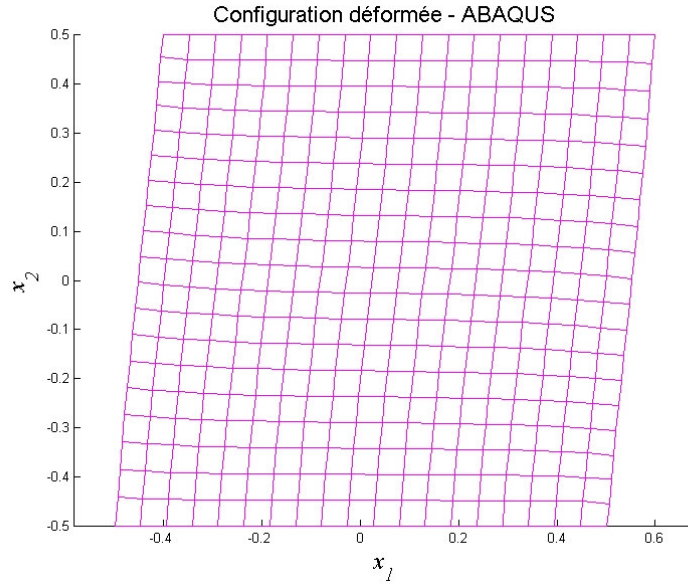


Figure 4.21: Configurations déformées du maillage

Sur les Figure 4.22 et Figure 4.23, nous comparons les courbes des composantes u_1 et u_2 du déplacement, calculées par le couplage DAR-X-FEM et par des éléments finis standard, pour les trois sections 1-1, 2-2 et 3-3 dont les positions sont identiques pour le problème thermique (4.2.2). En général, les résultats du couplage DAR-X-FEM sont relativement cohérents avec ceux des éléments finis standard, sauf à l'intérieur du joint où le couplage DAR-XFEM "*traverse*" par une discontinuité tandis que les éléments finis standard modélise les trois couches complètement. Cependant, cette différence n'est que dans une couche de faible épaisseur (ε), donc l'exactitude globale du couplage DAR-X-FEM n'est pas influencée. Au travers de l'interface Γ^{13} (pour les sections 1-1 et 2-2), nous ne constatons que le saut $[[u_1]]$, mais pas le saut $[[u_2]]$, parce que les valeurs du saut $[[u_2]]$ sont extrêmement faibles (presque nulles!) pour la plupart de l'interface et de l'ordre de 10^{-8} pour quelques points seulement (voir la Figure 4.20).

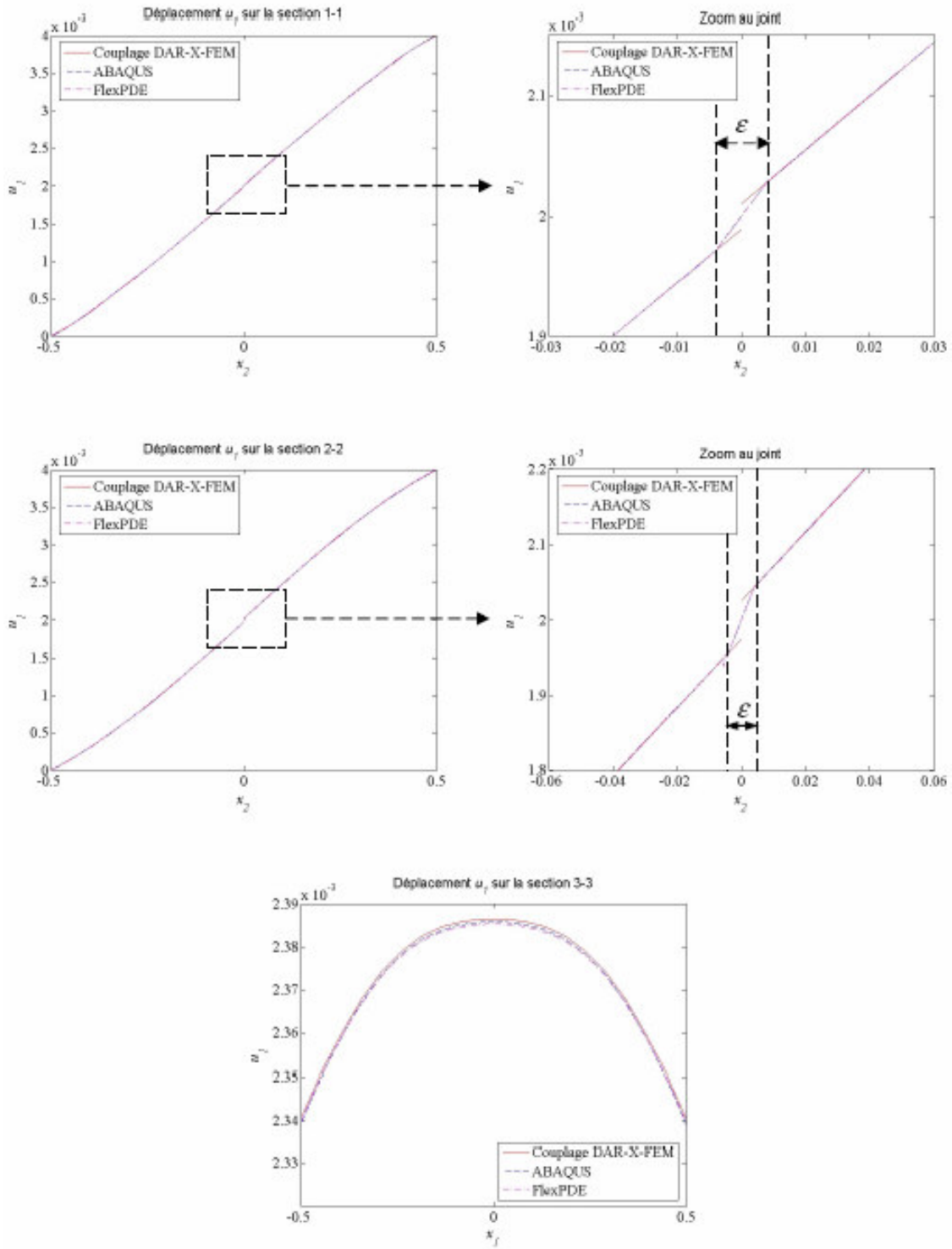


Figure 4.22: Représentation de la composante u_1 sur les sections

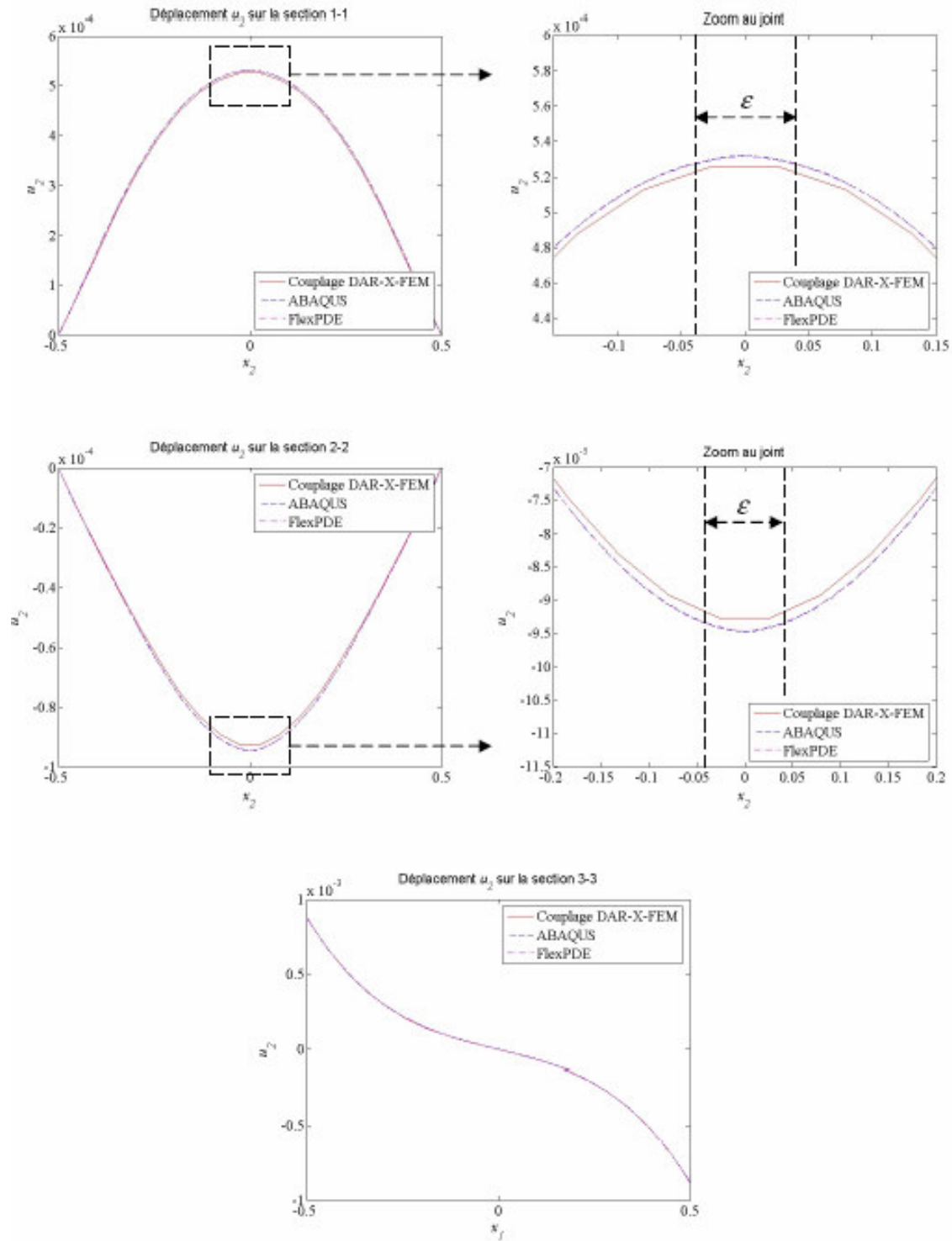
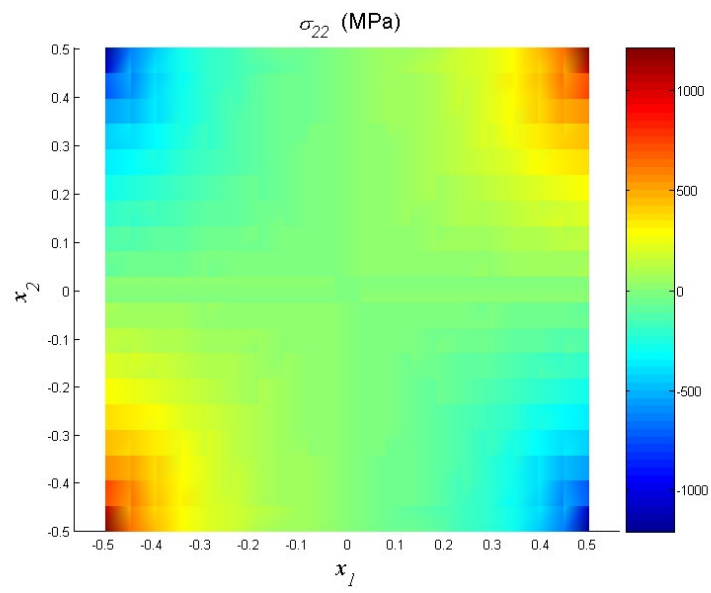
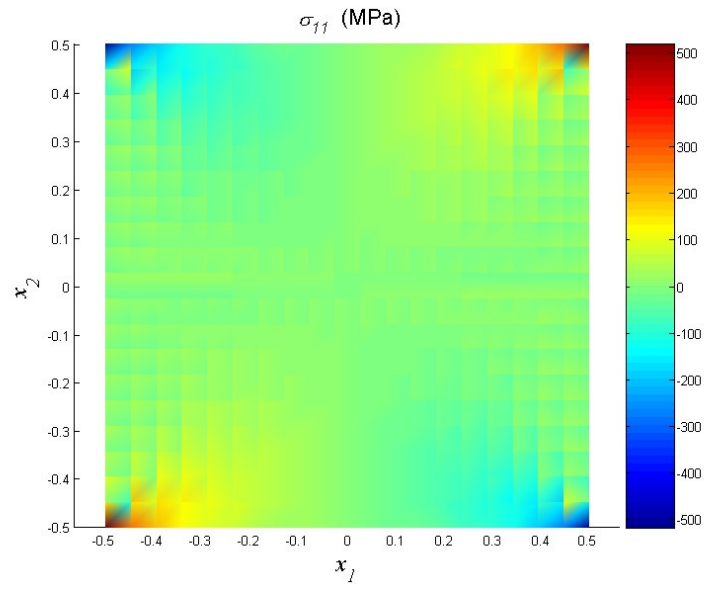


Figure 4.23: Représentation du composant u_2 sur les sections

Les champs des contraintes calculés par le couplage DAR-XFEM sont présentés sur la Figure 4.24.



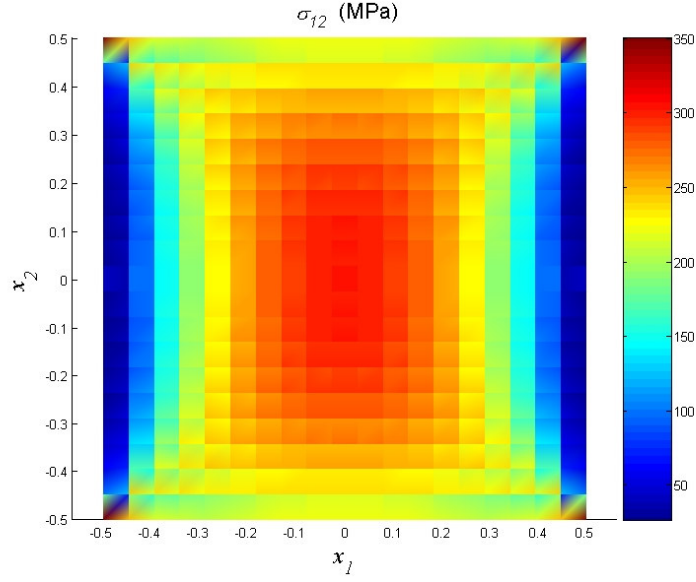


Figure 4.24: Champs des contraintes

A partir des composantes du tenseur des contraintes, on peut calculer la contrainte équivalente de Von Mises pour le cas des déformations planes par la formule suivante:

$$\sigma_{eq} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + (\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + (\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + 6\sigma_{12}^2} \quad \text{avec } \sigma_{33} = \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22}) \quad (4.39)$$

Le contour de la contrainte équivalente de Von Mises est présenté sur la Figure 4.25 ci-dessous.

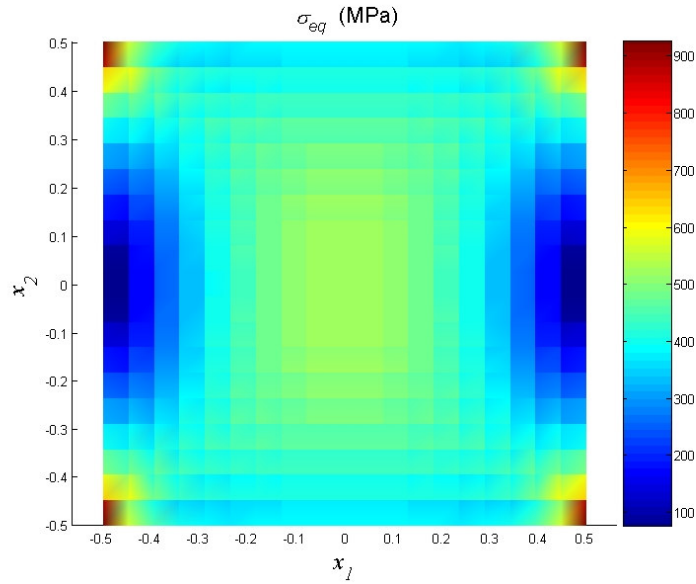


Figure 4.25: Contour de la contrainte équivalente de Von Mises

4.3.2.2. Cas 2

Dans cette section, nous considérons le cas de traction-cisaillement de l'assemblage brasé (Figure 4.26). Le côté à gauche est fixé par l'encastrement tandis que les deux côtés supérieur et inférieur sont libres. Pour le côté à droite, un déplacement normalisé $\tilde{U}^d = 0.004$ est imposé sur la partie du sous-domaine Ω^3 suivant la direction x_1 , les parties des sous-domaines Ω^1 et Ω^2 sont libres.

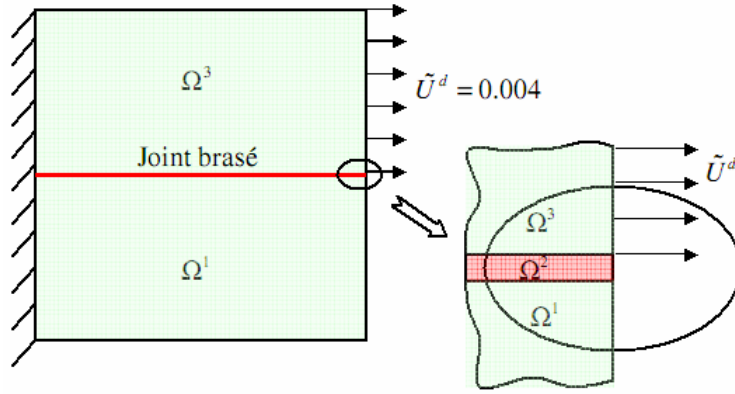
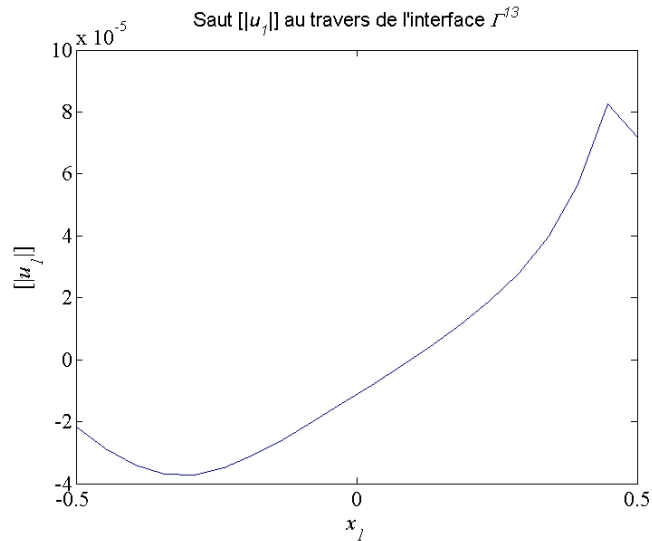


Figure 4.26: Cas de traction-cisaillement

La Figure 4.27 illustre les sauts du déplacement $[[u_1]]$ et $[[u_2]]$ en fonction de x_1 . Nous pouvons constater que ces sauts sont du même ordre de grandeur (10^{-5}) dans le problème adimensionnel.



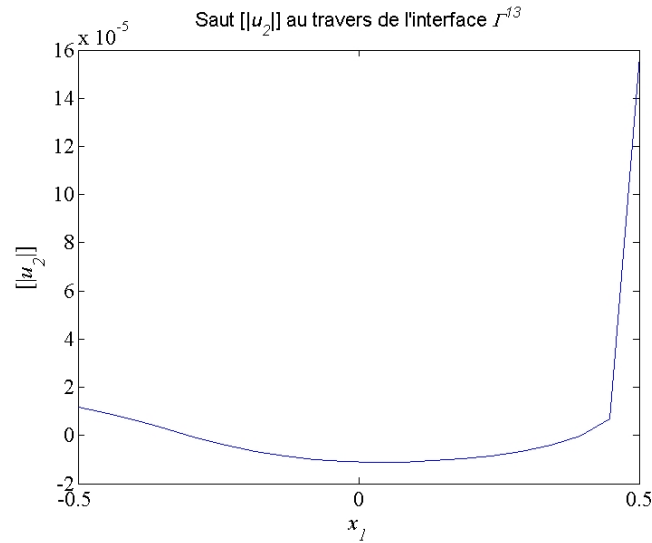
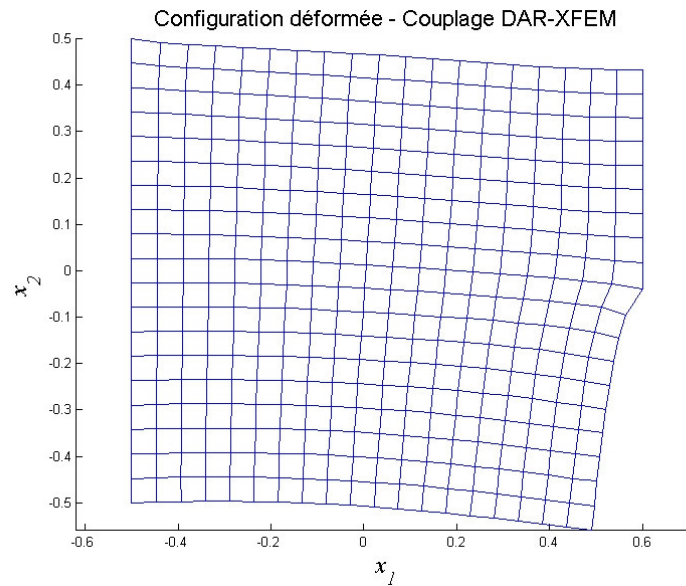


Figure 4.27: Représentation des sauts du déplacement en fonction de x_1

Les configurations déformées du maillage après le calcul sont présentées sur la Figure 4.28 en multipliant avec le facteur de grossissement $f_g = 25$. La comparaison montre une bonne cohérence entre la configuration obtenue par le couplage DAR-X-FEM et celles calculées par les logiciels FlexPDE[®] et ABAQUS.



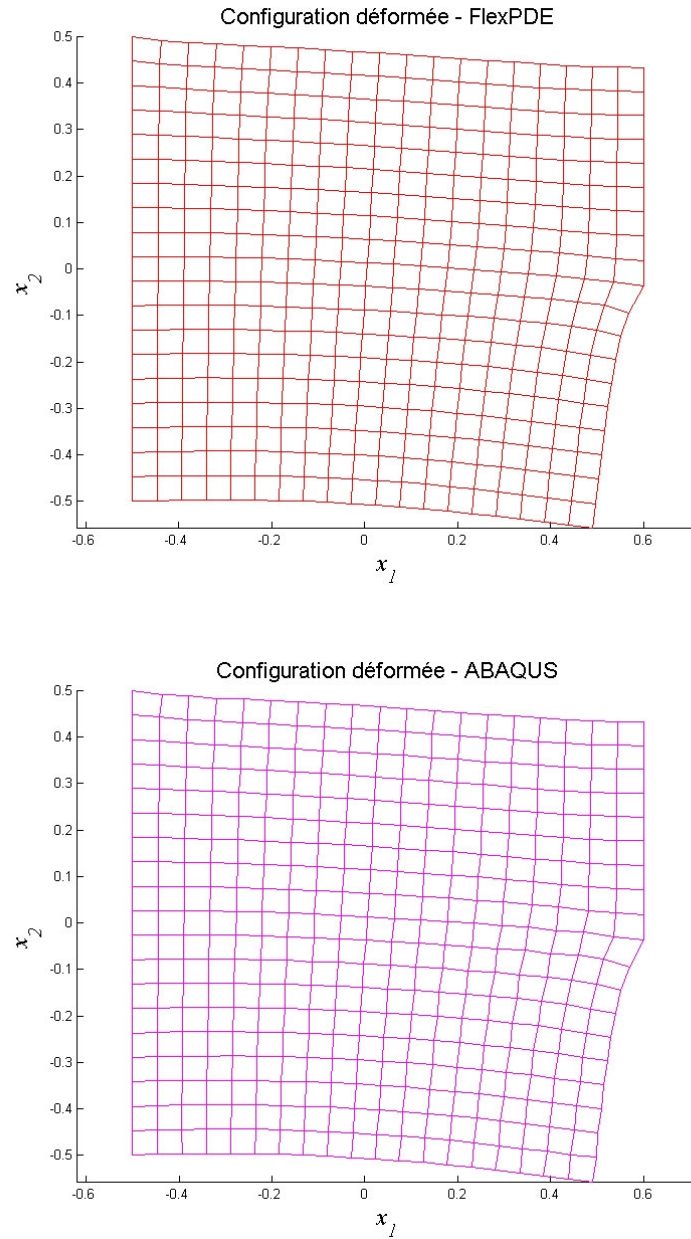


Figure 4.28: Configurations déformées du maillage après le calcul

Pour mieux comparer les résultats du couplage DAR-X-FEM et des éléments finis standard, on trace les courbes du déplacement sur les trois sections 1-1, 2-2 et 3-3 (cf. Figure 4.29 et Figure 4.30). Contrairement au cas de cisaillement pur (voir la Section 4.3.2.1), dans ce cas, nous pouvons observer clairement les deux sauts $\llbracket u_1 \rrbracket$ et $\llbracket u_2 \rrbracket$ sur les sections 1-1 et 2-2 perpendiculaires au joint brasé. En plus, les résultats du couplage DAR-XFEM sont moins cohérents avec ceux des logiciels FlexPDE® et ABAQUS que pour le cas précédent.

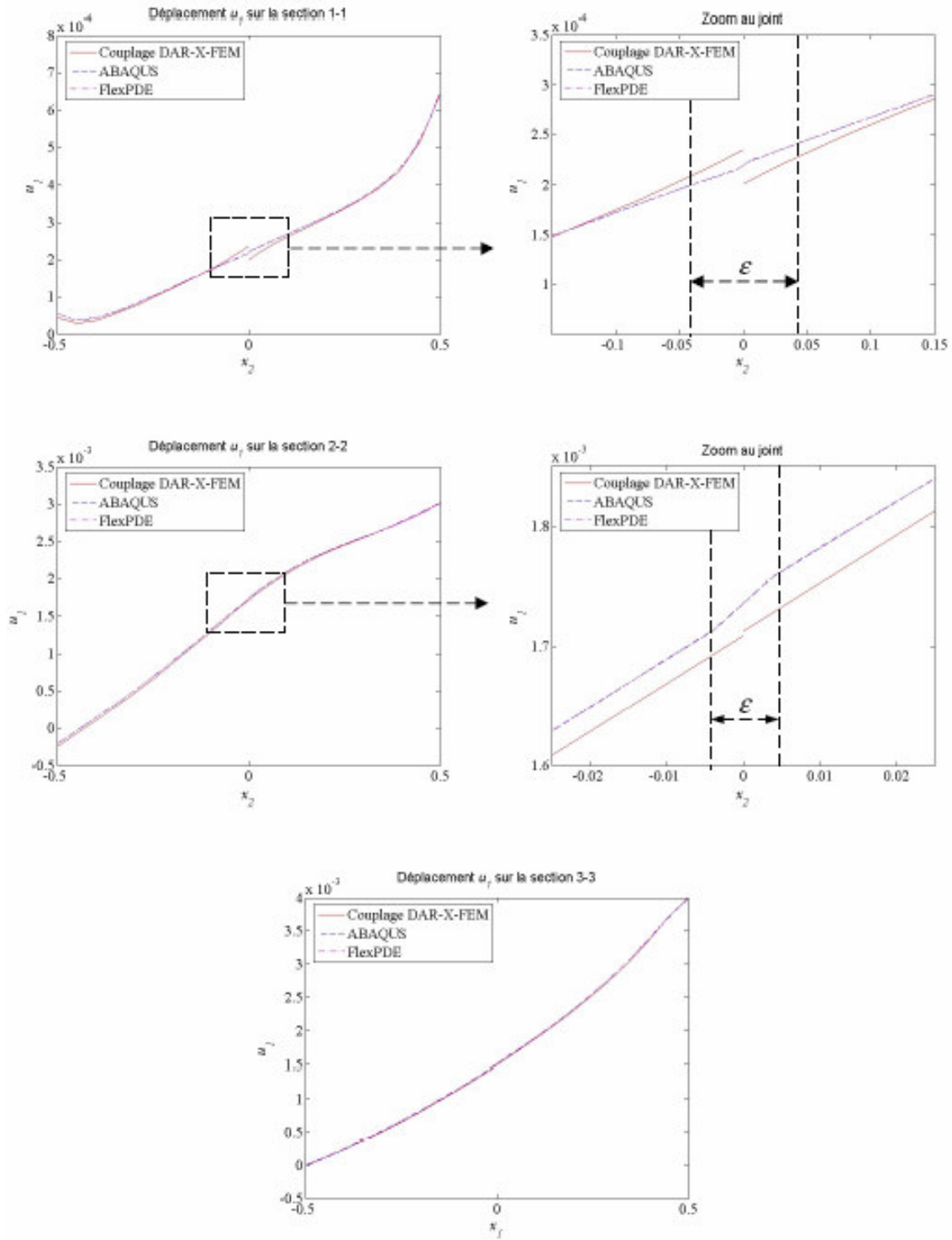


Figure 4.29: Représentation de la composante u_1 du déplacement sur les sections

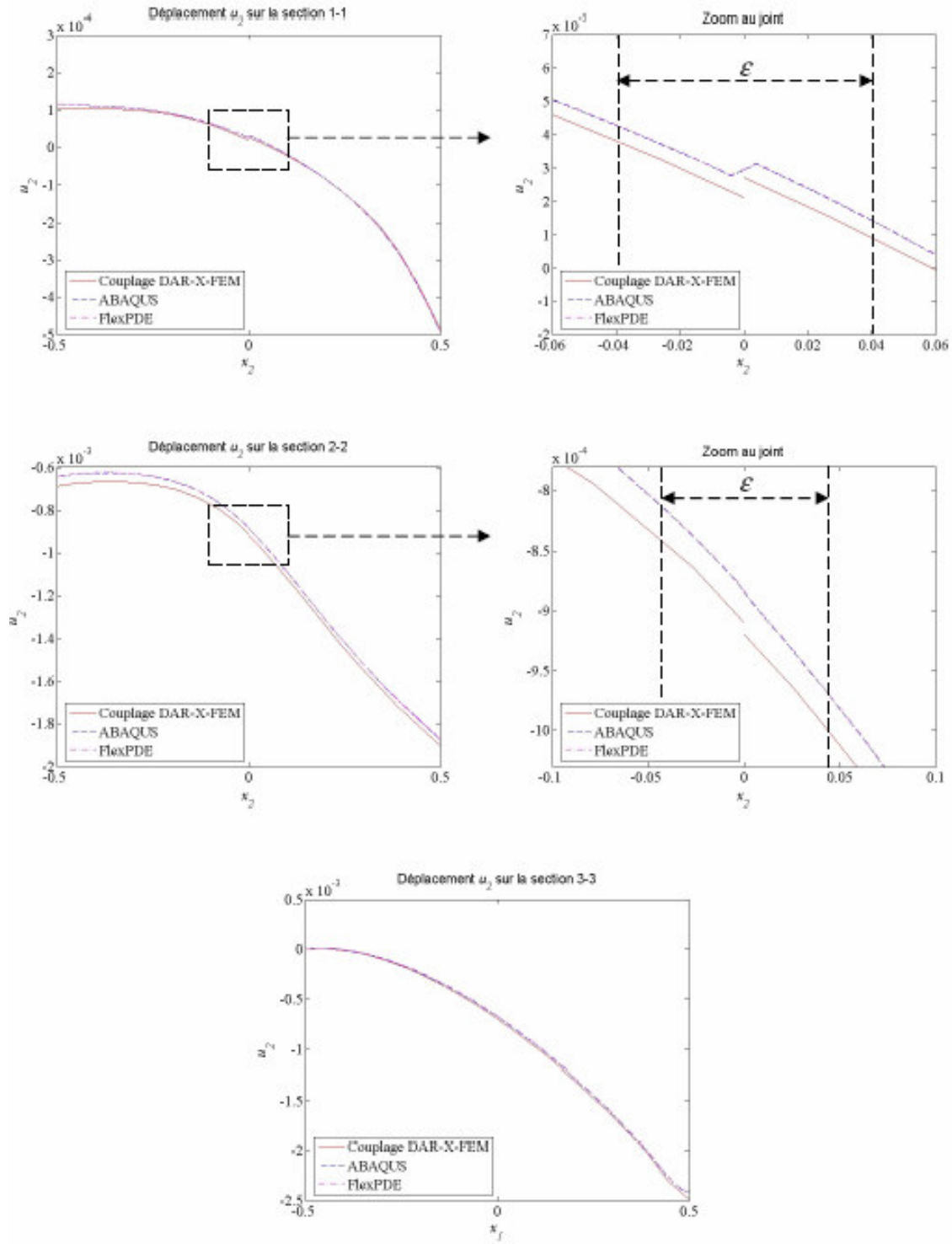
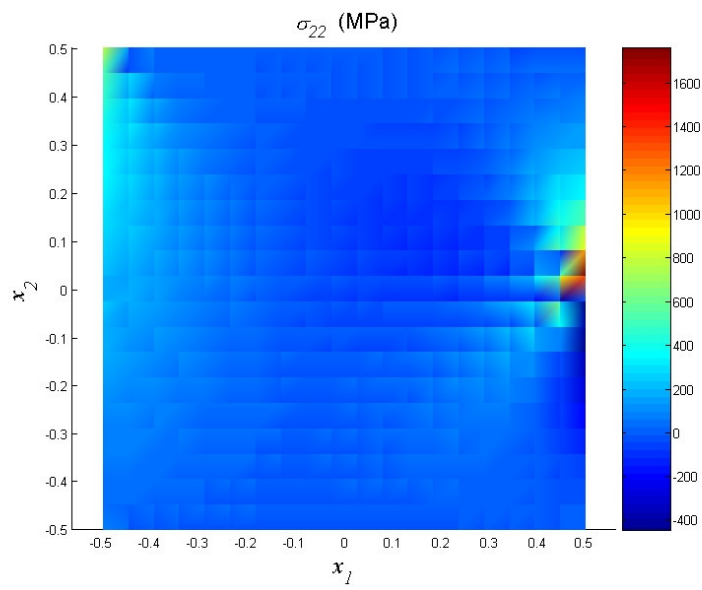
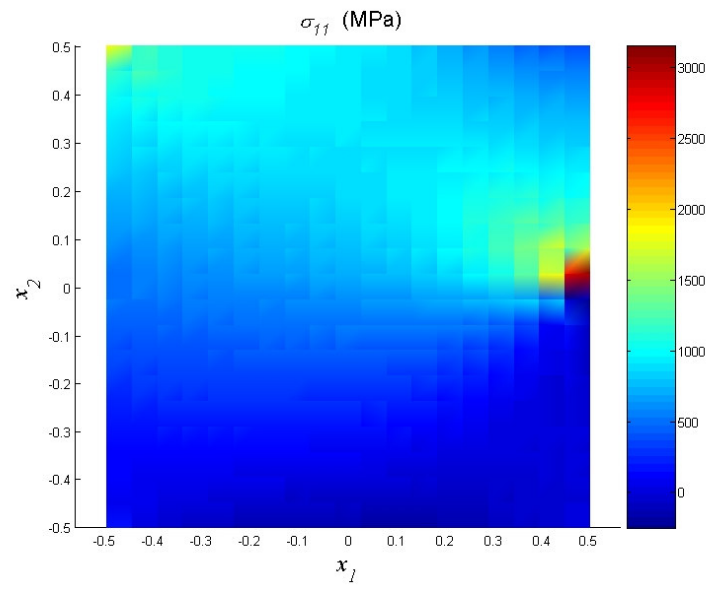


Figure 4.30: Représentation de la composante u_2 du déplacement sur les sections

En se basant sur le champ du déplacement, les champs des contraintes sont calculés par le couplage DAR-X-FEM. Les résultats sont présentés sur la Figure 4.31.



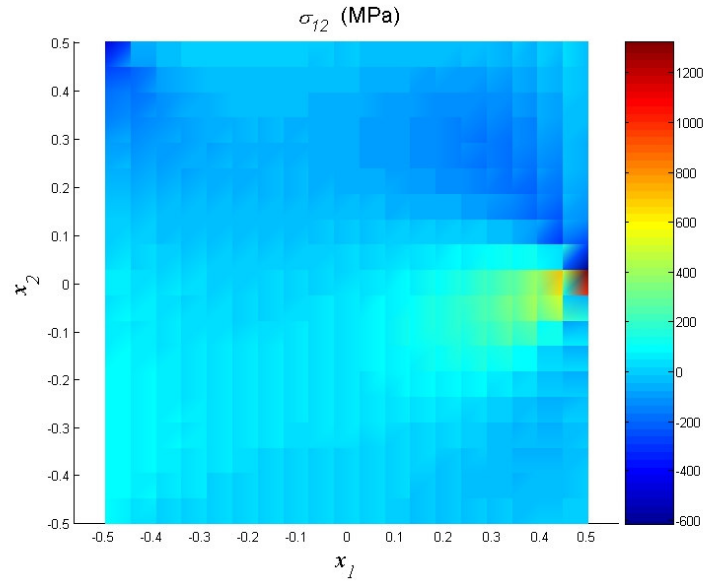


Figure 4.31: Champs des contraintes

La contrainte équivalente de Von Mises est calculée en utilisant la formule (4.39) de la Section 4.3.2.1. La Figure 4.32 présente le contour de la contrainte équivalente de Von Mises du domaine. Nous constatons une concentration des contraintes autour du bout de l'interface Γ^{13} .

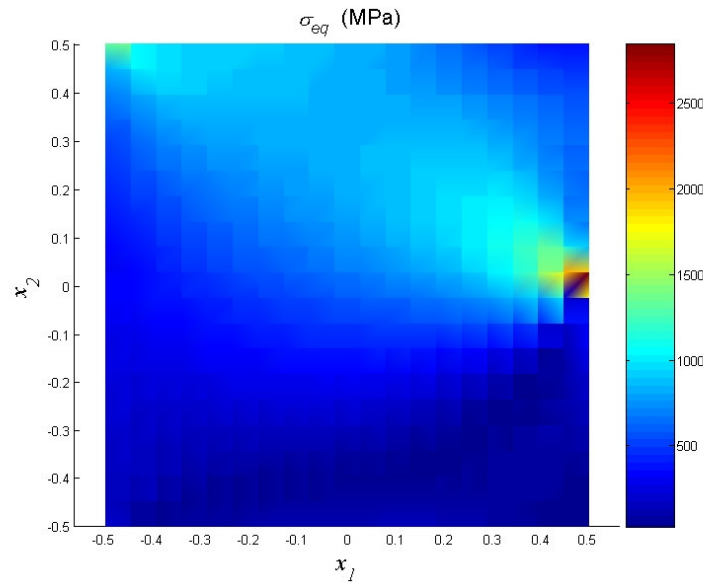


Figure 4.32: Contour de la contrainte équivalente de Von Mises

4.4. Conclusion

Ce chapitre illustre la mise en œuvre du couplage DAR-X-FEM pour le cas bidimensionnel de l'assemblage brasé. Découlant des résultats obtenus pour le cas unidimensionnel, la méthode sur les paramètres d'enrichissement présentée par la cinquième variante montre son efficacité et robustesse pour ce cas 2D. L'utilisation de la fonction enrichie de type Heaviside est combinée avec les conditions aux limites "*particulières*" sur les paramètres d'enrichissement.

La position du problème 2D est présentée dans la première partie du chapitre. Nous avons détaillé la démarche adoptée pour le couplage DAR-X-FEM 2D. Elle consiste en deux étapes principales: l'approche des DAR et l'implémentation de la X-FEM. La première étape est effectuée analytiquement et numériquement (à l'aide du logiciel des éléments finis standard FlexPDE®) pour obtenir la valeur du saut des champs primordiaux (la température pour le problème thermique ou le déplacement pour le problème mécanique) au travers de l'interface de singularité Γ^{13} . La deuxième étape est mise en œuvre par un programme écrit sous environnement Matlab.

La deuxième partie du chapitre consiste à présenter l'application du couplage DAR-XFEM 2D pour le problème thermique en régime permanent. Après les principes généraux pour ce type de problème, nous avons présenté les résultats numériques pour deux cas de conditions aux limites (sans ou avec la condition du flux imposée). Le champ de la température pour tout domaine ainsi que les températures sur les trois sections choisies obtenus par la couplage DAR-X-FEM sont comparés avec ceux des éléments finis standard (FlexPDE® et ABAQUS). Les résultats sont cohérents globalement, sauf dans la région autour du joint brasé (de l'épaisseur de l'ordre de ε). Le résultat du couplage DAR-X-FEM présente une discontinuité tandis que ceux de deux logiciels FlexPDE® et ABAQUS sont continus au travers de l'interface Γ^{13} . Cela peut être expliqué par la différence entre le modèle réel de trois couches ($\Omega^1 \cup \Omega^2 \cup \Omega^3$) des éléments finis standard et celui approché de deux couches dans lequel le joint brasé est remplacé par l'interface de singularité ($\Omega^1 \cup \Gamma^{13} \cup \Omega^3$). Les cartes d'erreur de comparaison nous a montrés l'exactitude des résultats du couplage DAR-X-FEM par rapport à ceux des éléments finis standard.

Dans la troisième partie du chapitre, le couplage DAR-XFEM 2D est appliqué pour le problème mécanique. Deux cas de sollicitations (cisaillement pur et traction-cisaillement) sont considérés. Les configurations déformées du maillage après le calcul obtenues par le couplage DAR-X-FEM et par la FEM standard sont identiques. La représentation du déplacement sur les sections choisies du domaine a consolidé la cohérence entre les méthodes de calcul au niveau global du

domaine de l'assemblage. Au niveau local du joint brasé, identiquement pour le problème thermique, il y a une différence entre les deux modèles (DAR-X-FEM et FEM classique) dans une épaisseur de l'ordre de ε .

Bibliographie

Alberty, J., Carstensen, C., Funken, S. (1999). Remarks Around 50 Lines of MATLAB: A Short Finite Element Implementation. *Numerical Algorithms*, **20**, 117-137.

Chessa, J. (2002). *Programing the Finite Element Method with Matlab*. <http://www.tam.northwestern.edu/jfc795/Matlab/>.

Fish, J., Belytschko, T. (2007). *A First Course in Finite Elements*. JohnWiley & Sons Ltd.

FlexPDE[®]. *User Manual*, PDE Solutions Inc. P.O.Box 4217, Antioch, CA 94531. <http://www.pdesolutions.com>.

Jiang, W., Gong, J., Tu, S., Fan, Q. (2009). A comparison of brazed residual stress in plate–fin structure made of different stainless steel. *Materials and Design*, **30**, 23-27.

Kwon, Y. W., Bang, H. (1997). *The Finite Element Method using Matlab*. CRC Press, New York, USA.

Legay, A. (2007). *Mécanique numérique des structures*, Support de cours.

Mohammadi, S. (2008). *Extended Finite Element Method for Fracture Analysis of Structures*. Blackwell Publishing Ltd.

Nafi, A. (2005). *Etude expérimentale et numérique du comportement mécanique de moules d'injection de plastique obtenus par le procédé de stratoconception*. Université Toulouse III, Albi, France.

Nguyen, V. P. (2005). *An object oriented approach to the extended finite element method with applications to fracture mechanics*. Hochiminh City University of Technology, Vietnam.

Nguyen, V. P. (2006). Extended finite element MATLAB code.

Quek, S. S., Liu, G. R. (2003). *The Finite Element Method: A Practical Course*. Butterworth Heinemann.

Remacle, J. F., Geuzaine, C. (1998). *Gmsh finite element mesh generator*. <http://www.montefiore.ulg.ac.be/geuzaine/gmsh.html>.

Stolarska, M., Chopp, D. L., Moës, N., Belytschko, T. (2001). Modelling crack growth by level sets in the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **51**, 943–960.

Sukumar, N., Chopp, D. L., Moës, N. et Belytschko, T. (2000). Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **190**, 6183-6200.

Chapitre 5

Etude expérimentale et validation des résultats

Chapitre 5	Etude expérimentale et validation des résultats	183
5.1.	Essais de brasage à haute température des alliages d'apport à base de nickel	184
5.1.1.	Choix des matériaux	184
5.1.1.1.	Matériau de base.....	184
5.1.1.2.	Alliage d'apport.....	184
5.1.2.	Moyen de chauffage	186
5.1.3.	Essais de définition des paramètres optimaux pour le brasage	188
5.1.3.1.	Préparation des éprouvettes	188
5.1.3.2.	Pression appliquée au cours du brasage	189
	• Première variante.....	189
	• Deuxième variante.....	189
5.1.3.3.	Cycle de brasage.....	190
5.1.3.4.	Résultats et configuration choisie	193
5.1.4.	Essais de brasage	197
5.1.4.1.	Préparation des éprouvettes	197
5.1.4.2.	Cycle de brasage.....	199
5.1.4.3.	Microstructure de l'assemblage brasé	199
5.2.	Caractérisation des propriétés de l'assemblage brasé acier H11/alliage d'apport BNi-2 ..	201
5.2.1.	Essais mécaniques	201
5.2.1.1.	Machines d'essais	201
5.2.1.2.	Essai de traction	203
	• Epreuves	203
	• Description de l'essai	205
	• Résultats.....	205
5.2.1.3.	Essai de compression.....	207
	• Epreuves	207
	• Description de l'essai	207
	• Résultats.....	208

5.2.1.4. Essai de cisaillement.....	209
• Eprouvettes	209
• Description de l'essai	211
• Résultats.....	212
5.2.1.5. Essai de flexion	213
• Eprouvettes	213
• Description de l'essai	214
• Résultats.....	214
5.2.2. Mesure de la conductivité thermique	215
• Moyen et principe de mesure	215
• Echantillons.....	217
• Description de la mesure	217
• Résultats.....	218
5.3. Validation des résultats	219
5.3.1. Essai de traction	219
5.3.1.1. Identification	219
5.3.1.1.1 . Problème général d'identification	219
5.3.1.1.2 . Formulation	220
5.3.1.1.3 . Résultats	221
5.3.1.2. Confrontation	223
5.3.2. Essai de cisaillement.....	225
5.3.2.1. Identification	225
5.3.2.1.1 . Formulation	225
5.3.2.1.2 . Résultats	227
5.3.2.2. Confrontation	228
5.4. Conclusion.....	229
Bibliographie.....	231

Chapitre 5

Etude expérimentale et validation des résultats

Ce chapitre présente une étude expérimentale et la tentative de validation du calcul à l'aide du couplage DAR-XFEM par des résultats expérimentaux. Il est donc divisé en trois parties principales:

La première partie porte sur des essais relatifs au procédé de brasage. Nous considérons un brasage à haute température. L'assemblage brasé est constitué de deux plaques en acier X38CrMoV5.1 comme métal de base et de l'un des deux alliages d'apport: PN38712 (CASTOLIN) et LM (NICROBRAZ). En exploitant les équipements du laboratoire, tout d'abord, nous avons réalisé des essais avec des éprouvettes simplifiées sous forme de petits blocs en acier pour choisir l'alliage d'apport parmi les deux cités et la configuration optimale du procédé de brasage. Les deux facteurs du procédé qui influencent essentiellement la qualité de l'assemblage brasé sont: le cycle de température et la pression appliquée sur l'éprouvette au cours du brasage. Dans un second temps, les blocs en acier dont les formes et les dimensions ont été choisies pour tailler des éprouvettes d'essais mécaniques ont été brasés à l'aide de l'alliage d'apport choisi selon la configuration optimale.

La deuxième partie a pour but de caractériser les propriétés mécaniques et thermiques de l'assemblage brasé. Des éprouvettes sont taillées dans les blocs brasés obtenus dans la partie précédente. A travers la gamme d'essais comprenant: traction, compression, cisaillement et flexion, nous avons l'intention de déterminer la tenue mécanique des éprouvettes brasées. Une mesure thermique nous aide à identifier la conductivité thermique moyenne de l'assemblage brasé. Tous ces résultats nous aident à vérifier la qualité de l'assemblage obtenu par notre procédé de brasage. Dans la troisième partie du chapitre, nous exploitons les résultats des essais de traction et de cisaillement pour identifier les modules d'Young de l'acier et du joint après assemblage. Ensuite, ces valeurs acquises sont introduites dans les simulations numériques par le couplage DAR-XFEM, dont le principe est présenté dans les chapitres 3 et 4, et par le logiciel des éléments finis standard FlexPDE[®]. Les résultats obtenus par les simulations numériques sont

comparés avec ceux de la partie expérimentale. Cette confrontation nous aide à valider le modèle du couplage DAR-X-FEM proposé.

5.1. Essais de brasage à haute température des alliages d'apport à base de nickel

5.1.1. Choix des matériaux

5.1.1.1. Matériau de base

Dans notre étude, nous avons choisi l'acier de la nuance X38CrMoV5.1 (ou H11) comme le matériau de base. Cette nuance d'acier est utilisée largement pour des outils qui travaillent à haute température et sous haute pression, par exemple des moules d'injection de fonderie. Cette caractéristique du matériau de base convient à l'application de l'assemblage brasé à laquelle on s'intéresse. Ce choix est aussi motivé par la disponibilité de ce type de l'acier dans le laboratoire. La composition chimique nominale du métal de base est présentée dans le Tableau 5.1 ci-dessous.

Elément	Fe	C	Cr	Mo	V
Masse (%)	Base	0.4	5	1.3	0.4

Tableau 5.1: Composition chimique nominale de l'acier X38CrMoV5.1 (Aubert&Duval)

L'acier H11 est délivré sous forme de barreaux de section rectangulaire $17 \times 18 (mm)$ et de section circulaire de diamètres $20 mm$ et $90 mm$ à l'état recuit.

5.1.1.2. Alliage d'apport

Le brasage à haute température exige un alliage d'apport avec des caractéristiques spéciales. En consultant des catalogues et des experts en brasage, les alliages à base de nickel ont été choisis. Dans un premier temps, nous avons essayé deux alliages de référence: PN38712 du CASTOLIN et LM du NICROBRAZ.

L'alliage PN38712 est fourni sous forme de pâte dans une boîte du poids d'un kilogramme. La composition chimique nominale et l'intervalle de fusion de cet alliage sont donnés dans le Tableau 5.2.

Composition (%)				Intervalle de fusion	
Ni	Cr	B	Si	Solidus (°C)	Liquidus (°C)
Reste	7.0	3.1	4.5	970	1000

Tableau 5.2: Composition chimique nominale et l'intervalle de fusion de l'alliage d'apport PN38712 (Castolin, 2007)

A cause de la forme pâteuse de l'alliage PN38712, nous avons rencontré des difficultés dans l'étape de préparation des éprouvettes à braser. Dès le moment où l'on a appliqué une petite pression pour fixer les éprouvettes, une partie de la pâte de l'alliage d'apport a coulé. Nous avons également observé des porosités qui se sont formées avant le brasage.

La deuxième solution est d'utiliser l'alliage de référence LM du NICROBRAZ qui est équivalent aux autres références: BNi-2 (AWS), 4777 (AMS), 35-302 (SNECMA DMR), 9500/97 (ROLLS ROYCE) (Rabinkin, 2004).

Elément	Ni	Cr	Si	B	Fe	C
Masse (%)	Base	7.0	4.5	3.1	3.0	0.03

Tableau 5.3: Composition chimique nominale de l'alliage d'apport LM (WallColmonoy, 2008)

Résistance du joint	Diffusion dans le métal de base	Fluidité	Résistance du joint à l'oxydation jusqu'à: °C	Domaine de brasage en °C	Température de brasage conseillée	Jeu mini/maxi recommandé (mm)	Résistance à la corrosion	Densité (g/cm ³)
1	2	2	2 1090	1010 1175	1040	0.03 0.10	Bonne	7.88
Remarque: Echelle de 1 (niveau le plus haut) à 10 (niveau le plus bas)								

Tableau 5.4: Propriétés physiques et métallurgiques de l'alliage LM (WallColmonoy, 2008)

La composition chimique nominale et les propriétés physiques et métallurgiques de l'alliage LM sont données dans les Tableau 5.3 et Tableau 5.4. En possédant un intervalle de fusion entre 971°C (solidus) et 999°C (liquidus) (valeurs relativement faibles et rapprochées) et en même temps une bonne performance à haute température contre l'oxydation et la corrosion, LM est l'alliage d'apport à base de nickel le plus largement utilisé.

Les caractéristiques thermophysiques et mécaniques de l'alliage LM à différentes températures peuvent être trouvées dans les travaux de (Jiang *et al.*, 2008) (cf. Tableau 5.5).

Température ($^{\circ}\text{C}$)	Conductivité ($\text{W/m} \cdot ^{\circ}\text{C}$)	Chaleur spécifique ($\text{J} / ^{\circ}\text{C} \cdot \text{kg}$)	Coefficient de dilatation ($10^{-6}/^{\circ}\text{C}$)	Module d'Young (GPa)	Coefficient de Poisson	Résistance (MPa)
20	25.59	469.5	13.5	205.1	0.296	424
400	29.18	577.7	16.8	183.2	0.306	368
900	33.58	1161.3	21.3	127.6	0.328	255

Tableau 5.5: Propriétés thermophysiques et mécaniques de l'alliage LM à différentes températures

L'alliage LM a été délivré sous forme de bande autocollante dont l'épaisseur est de 0.76mm .

5.1.2. Moyen de chauffage

En fonction de la disponibilité des équipements du laboratoire, nous avons utilisé alternativement deux fours: four vertical et four de traitement thermique LILLIPUT.

La plupart des essais de configuration des paramètres optimaux ont été effectués dans le four vertical (Figure 5.1). Ce four est monté et installé par les personnels du laboratoire.

L'enceinte du four est en forme cylindrique de diamètre 70mm et la hauteur de la zone chaude est de 200mm . La température maximale du chauffage atteinte par le four vertical est de 1200°C .



Figure 5.1: Four vertical

Les essais principaux de brasage ont été réalisés dans le four de traitement thermique LILLIPUT (voir Figure 5.2).

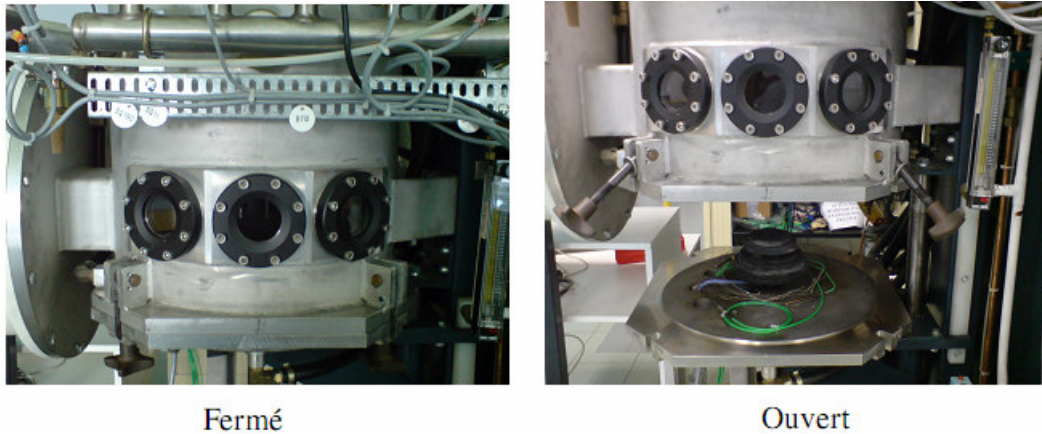


Figure 5.2: Four de traitement thermique LILLIPUT

Le four LILLIPUT possède une forme cylindrique avec axe vertical. L'enceinte du four est construite en acier inoxydable à double paroi. La sole et la platine supérieure sont plates. L'étanchéité du four est assurée par brides et joints toriques. Le pilotage du four est réalisé par une armoire électrique.

Dans l'enceinte du four, le résistor en graphite de diamètre $\varnothing 130$ et de hauteur $h = 150(mm)$ assure le chauffage jusqu'à la température maximale de $1350^{\circ}C$.

5.1.3. Essais de définition des paramètres optimaux pour le brasage

Avant de réaliser des essais de brasage avec des éprouvettes d'essais, il faut lancer des opérations avec des éprouvettes simplifiées pour définir les paramètres optimaux du procédé. On a réalisé ces opérations de brasage avec des fourchettes de paramètres différentes au niveau de l'alliage d'apport, du cycle de brasage et de la pression appliquée au cours de l'essai.

5.1.3.1. Préparation des éprouvettes

Pour les essais de définition des paramètres, des éprouvettes brasées de deux petits blocs sont utilisées (Figure 5.3). Les blocs d'acier ont été découpés à partir des barreaux en acier de section rectangulaire $17 \times 18 \text{ (mm)}$ en épaisseur de 10 mm .

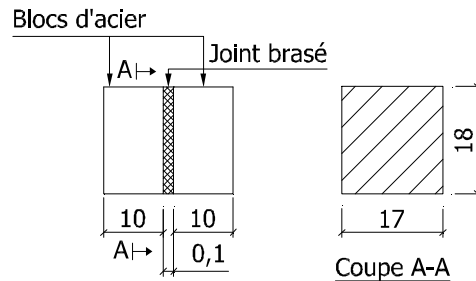


Figure 5.3: Eprouvette de l'essai de configuration des paramètres

Influençant considérablement la qualité du joint brasé, la préparation de surface des échantillons en matériaux de base doit être réalisée avec soin. Après le découpage, les échantillons sont rectifiés pour le but de créer des surfaces parfaitement plates et parallèles. Puis, ils sont nettoyés à l'aide d'éthanol. Ensuite, ils sont enrobés pour passer à l'étape du polissage. Le Tableau 5.6 résume l'ordre du polissage automatique à suivre pour les échantillons en acier.

Moyen	Papier de verre				
Taille	SIC 80	SIC 180	SIC 320	SIC 800	SIC 1200
Temps (min)	2.5	2.5	2.5	2.5	2.5

Tableau 5.6: Ordre du polissage pour les échantillons en acier

Après le polissage, le nettoyage par ultrason dans la solution d'éthanol pendant 15 minutes consiste à éliminer tous les résidus du polissage qui adhèrent aux surfaces des échantillons. Les dernières étapes de la préparation sont le séchage et l'essuyage des échantillons.

Pour enduire et étaler de pâte de l'alliage d'apport PN38712 sur les surfaces à braser, nous avons utilisé une petite baguette plate.

Pour l'alliage d'apport LM sous forme de bande autocollante, il est nécessaire d'arracher les films de couverture de deux faces, puis de coller directement sur les surfaces des échantillons déjà préparés.

Afin de fixer la position de l'éprouvette pendant le brasage, deux plaques d'acier ont été utilisées en combinant avec des boulons, écrous et rondelles (Figure 5.4).

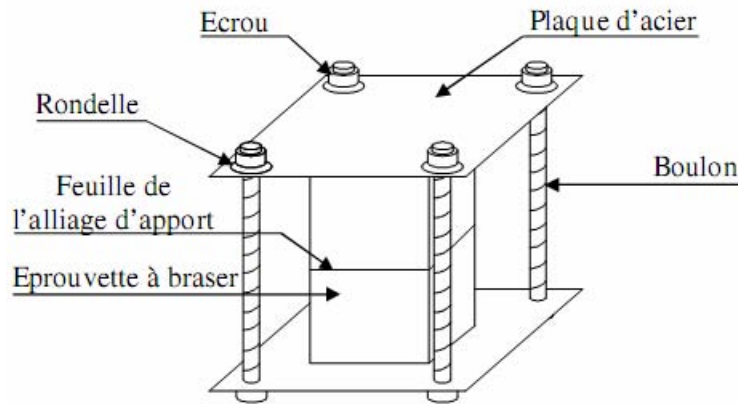


Figure 5.4: Montage de l'éprouvette de l'essai de configuration

5.1.3.2. Pression appliquée au cours du brasage

La pression appliquée sur l'éprouvette pendant le brasage influence nettement la formation du joint brasé, donc évidemment sa qualité. Des opérations de brasage sous deux variantes différentes de pression appliquée ont été effectuées pour déterminer la meilleure.

- ***Première variante***

La pression a été provoquée purement par le serrage des boulons. Au début de l'essai, les boulons étaient très serrés. Mais quand l'alliage d'apport a fondu, l'écartement entre deux plaques de maintien a diminué, le serrage des boulons est alors devenu lâche. La pression n'a pas été maintenue constante.

- ***Deuxième variante***

Nous avons disposé une masse en acier qui se situait sur la plaque de maintien supérieure (Figure 5.5). Les boulons étaient serrés de façon très lâche dans le seul but de positionner l'éprouvette. La pression sur la surface à braser a été engendrée seulement par la masse d'acier. Pendant le brasage, la feuille de l'alliage d'apport a été fondue et son épaisseur a diminué. En raison de la diminution de l'écartement entre deux plaques de maintien, la masse d'acier s'est baissée avec la descente de la plaque supérieure au long des boulons. Dans cette variante, la pression appliquée reste presque constante au cours du brasage. Pour nos essais, la pression appliquée est dans l'intervalle de 0.015 à 0.056 MPa .

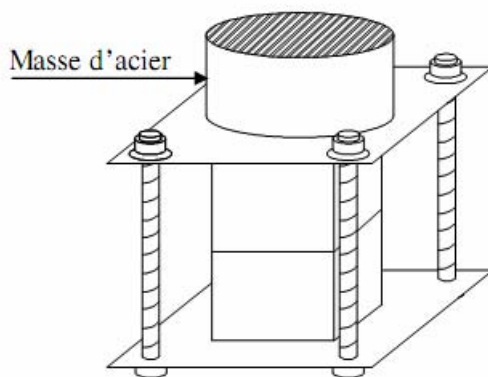


Figure 5.5: Pression engendrée par la masse d'acier

5.1.3.3. Cycle de brasage

Après la préparation, le montage et le chargement, l'éprouvette de brasage a été mise dans le four. Le vide dans le four est effectué par pompage. Le temps de pompage dépend de la capacité de la pompe et de l'étanchéité du four. Avant pompage, il est préférable de nettoyer les joints et bien serrer les écrous du four. Quand l'atmosphère atteint la valeur de $5 \times 10^{-1} \text{ mBar}$ approximativement, il est possible de lancer le cycle de brasage. Nous avons essayé trois cycles de brasage différents.

- **Cycle 1:**

C'est un cycle de brasage simple avec un palier de température (Figure 5.6)

- Le chauffage est de 20°C à 1050°C avec la vitesse de $10^{\circ}\text{C} / \text{min}$.
- La température de brasage $T_b = 1050(^{\circ}\text{C})$ a été maintenue pendant 10 min .

- Le refroidissement de vitesse $20^{\circ}\text{C}/\text{min}$ a été effectué par l'écoulement d'eau jusqu'à la température ambiante 20°C .

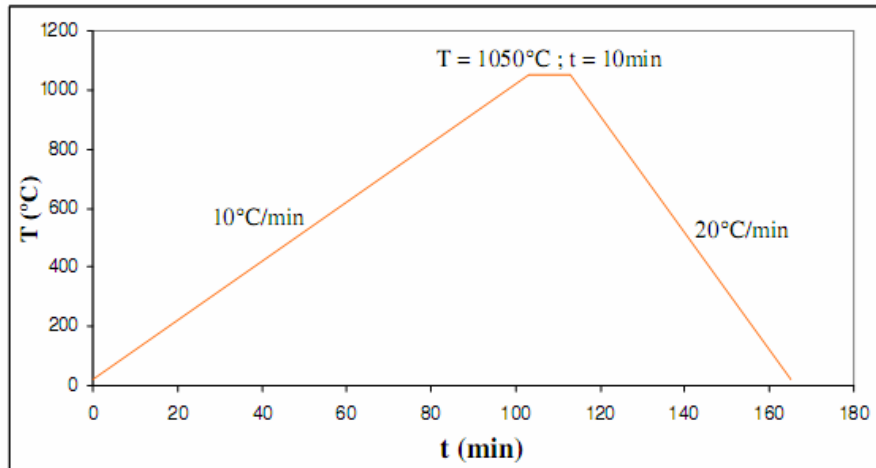


Figure 5.6: Cycle 1

- **Cycle 2:**

Il s'agit d'un cycle de brasage avec deux paliers de température suivi d'une trempe (Figure 5.7)

- Le chauffage est de 20°C à 1050°C avec la vitesse de $10^{\circ}\text{C}/\text{min}$.
- Le premier palier de $T_b = 1035(^{\circ}\text{C})$ est maintenu pendant 10 min.
- Une descente de température de 1035°C à 990°C a été réalisée avec la vitesse de $20^{\circ}\text{C}/\text{min}$.
- Le deuxième palier de 990°C est maintenu pendant 40 min.
- Une trempe assurée par du gaz d'hélium pendant une minute jusqu'à la température ambiante 20°C a terminé le cycle.

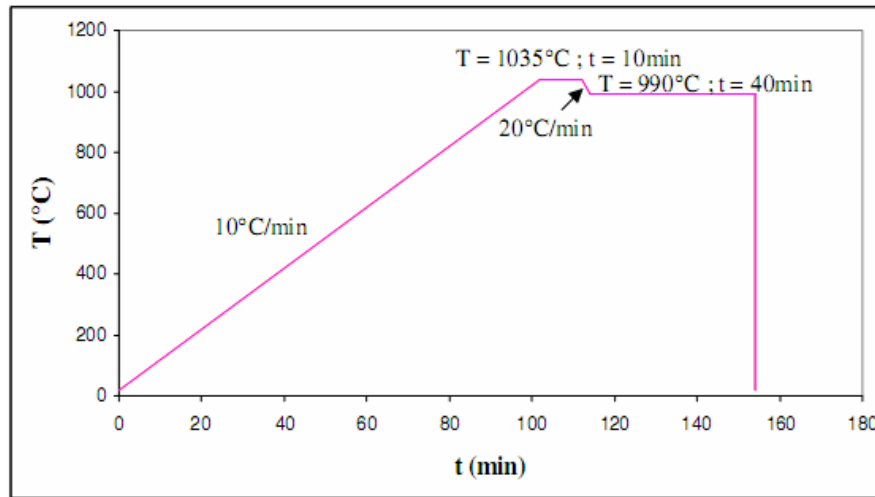


Figure 5.7: Cycle 2

• **Cycle 3:**

Il comprend le cycle 2 suivi de deux revenus de durcissement de l'acier (Aubert&Duval) (cf. Figure 5.8).

- Le premier revenu à la température $T_{r1} = 550(^{\circ}\text{C})$ est maintenu pendant 120 min . Le chauffage et le refroidissement entre 30°C et 550°C ont été menés avec la même vitesse de 20°C/min .
- Le deuxième revenu à la température $T_{r2} = 605(^{\circ}\text{C})$ est aussi maintenu pendant 120 min . La vitesse de chauffage et de refroidissement entre 30°C et 605°C est toujours de 20°C/min .

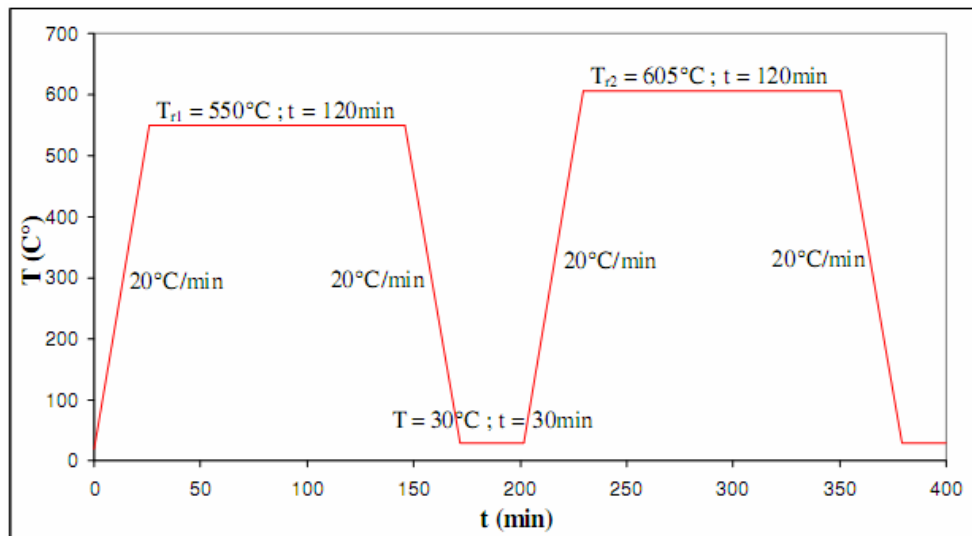


Figure 5.8: Deux revenus du cycle 3

Les configurations différentes des essais de définition des paramètres du brasage sont définies dans le Tableau 5.7 ci-dessous.

Configuration	Alliage d'apport	Pression	Cycle
C1	PN38712	1 ^{ère} variante	Cycle 1
C2	PN38712	2 ^{ème} variante	Cycle 1
C3	PN38712	2 ^{ème} variante	Cycle 2
C4	LM	2 ^{ème} variante	Cycle 2
C5	LM	2 ^{ème} variante	Cycle 3

Tableau 5.7: Configurations du procédé de brasage

5.1.3.4. Résultats et configuration choisie

Après le brasage, les éprouvettes des essais de définition des paramètres ont été observées à l'aide du microscope optique. Cette observation nous a aidés à évaluer la qualité de l'assemblage brasé obtenu par chaque configuration d'essai.

La Figure 5.9-(a) présente la microstructure du joint brasé obtenu par la configuration C1 de brasage. Dans cette configuration, la pression n'a pas été engendrée par application des poids en acier, mais seulement par le serrage des écrous. Pendant le brasage, la diminution de l'écartement entre deux plaques de serrage à cause de la fusion de l'alliage d'apport a provoqué la baisse de la pression appliquée sur les éprouvettes brasées. La pression insuffisante a provoqué la formation de porosités (petites taches noires) dans le joint comme l'on peut observer sur l'image.

Sur la Figure 5.9-(b), la microstructure du joint brasé obtenu par la configuration C2 est présentée. On peut apercevoir la présence de porosités, moins denses que dans la configuration C1. Ce phénomène peut être expliqué par le cycle de brasage effectué. Dans le cycle 1, le palier unique de température de brasage est assez court (10 min). Pendant ce palier, la surface de contact n'a pas été chauffée suffisamment et parfaitement, donc l'alliage d'apport n'a pas encore été fondu absolument. Pour de petites éprouvettes dans ces essais de configuration, l'influence de ce fait n'a pas été considérable, mais pour les blocs plus grands, le chauffage non homogène va aboutir des résultats inadmissibles.

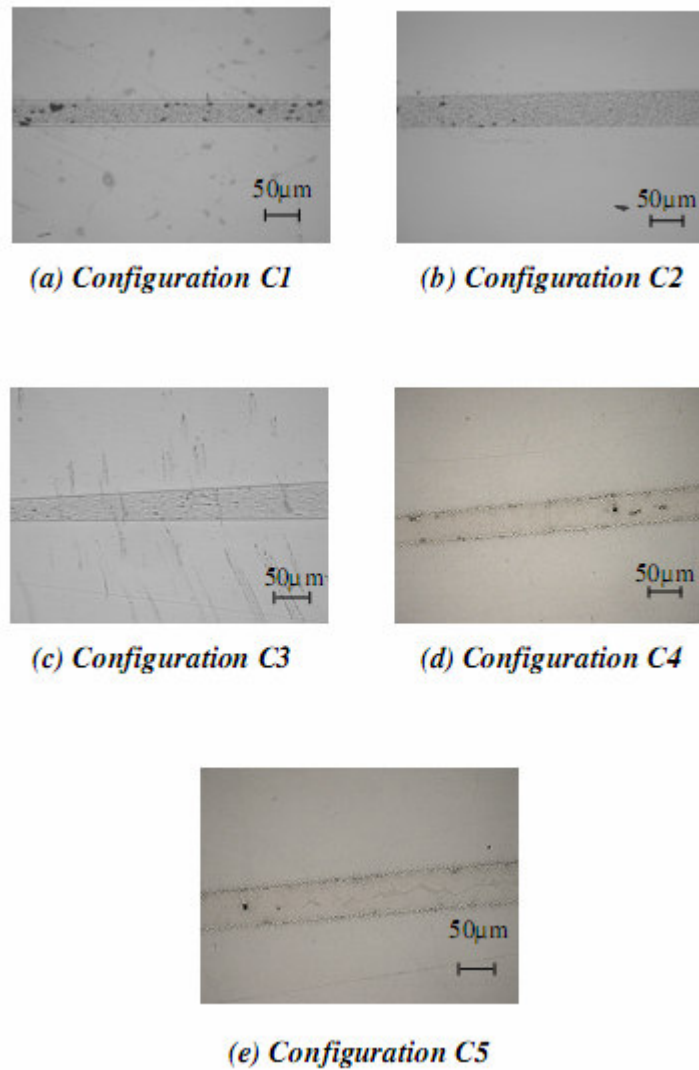


Figure 5.9: Observation du joint brasé par le microscope optique X100

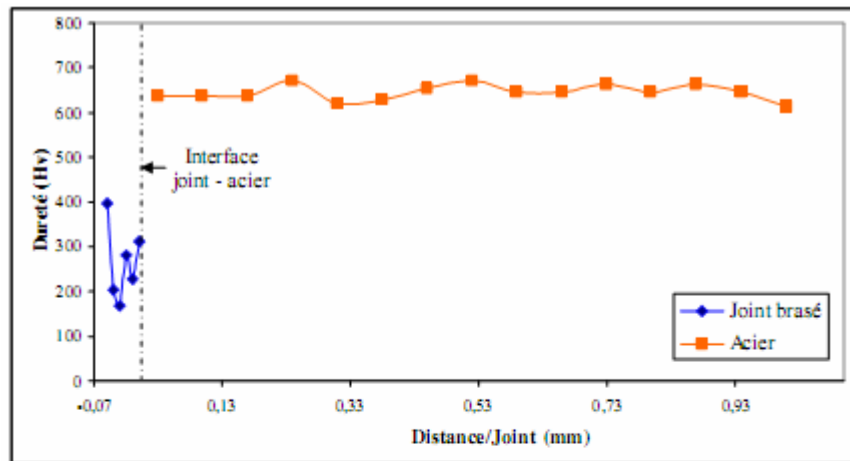
La Figure 5.9-(c) présente la microstructure du joint brasé issu de l'essai de la configuration C3. Le joint contient peu de porosités mais son épaisseur n'est pas uniforme. Ce fait peut être expliqué par des difficultés rencontrées dans l'étape de préparation des éprouvettes que nous avons déjà abordées avant. L'alliage PN38712 sous forme pâteuse est difficile à manipuler. Quand on a disposé des poids en acier sur les éprouvettes à braser, une petite quantité de l'alliage d'apport a coulé. Le manque d'alliage d'apport a provoqué des porosités et la non-uniformité de l'épaisseur du joint brasé.

Les joints de l'alliage d'apport LM obtenus par les configurations C4 (Figure 5.9-(d)) et C5 (Figure 5.9-(e)) sont meilleurs que ceux de l'alliage PN38712 (configurations C1, C2 et C3) au niveau de la porosité. De plus, les configurations C4 et C5 donnent des joints dont l'épaisseur est

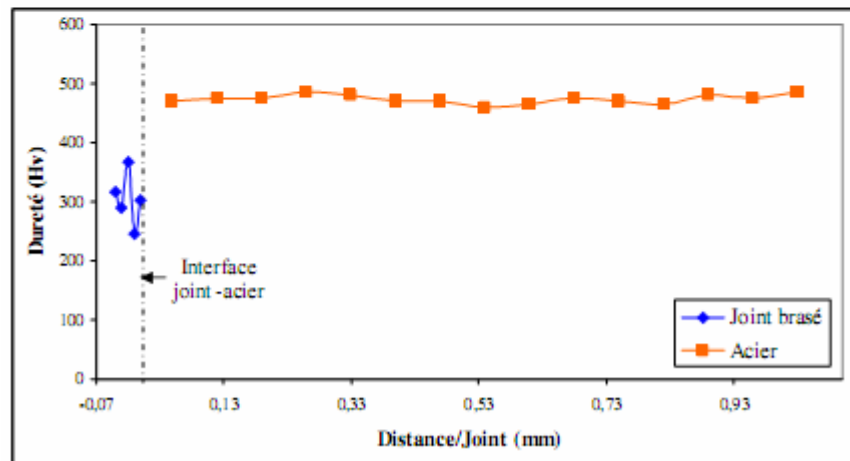
régulière. Pour détecter la différence entre les éprouvettes de ces deux configurations, leurs duretés ont été mesurées et présentées sur la Figure 5.10.

Sur la Figure 5.10-(a), nous constatons que les valeurs de dureté mesurées le long de l'éprouvette brasée trempée sans revenu sont fortement dispersées à la fois dans le joint et dans l'acier. La valeur moyenne mesurée de dureté de l'acier après le brasage est de $640 H_v$ et est largement supérieure à sa dureté avant le brasage, environ $235 H_v$ à l'état recuit (Aubert&Duval). L'acier est devenu trop dur et difficile à usiner. De plus, après le cycle de brasage à haute température, les propriétés microstructurales de l'acier ont été changées. Ce phénomène influence de façon négative la qualité commune de tout l'assemblage brasé.

En revanche, la Figure 5.10-(b) présente des courbes de dureté assez uniformes pour l'acier et moins dispersée dans le joint brasé. La valeur moyenne de dureté de l'acier obtenu par le brasage suivi de deux revenus est de $470 H_v$, exactement la valeur souhaitée lors du choix du temps de revenu. Les duretés respectives de l'acier et de la zone brasée sont moins écartées ce qui permet d'espérer obtenir des déformations plus uniformes sous sollicitation mécanique. En outre, les revenus réalisés à l'issue du cycle de brasage contribuent à éliminer les tensions internes de l'acier.



(a) Configuration C4: brasage sans revenu



(b) Configuration C5: brasage suivi de deux revenus

Figure 5.10: Courbe de la dureté Vickers au voisinage du joint brasé

En résumé, la configuration C5 nous a donné l'assemblage brasé le plus performant parmi cinq configurations considérées. L'alliage d'apport LM sous forme de bande autocollante a facilité la faisabilité de l'étape de préparation des éprouvettes. La pression engendrée par application des poids en acier a été transmise de façon uniforme à la surface de contact pendant tout le procédé de brasage. Le cycle 3 avec deux paliers de brasage a assuré l'homogénéité de température dans toute la pièce à braser. De plus, baisser la température du premier palier à 1035°C au deuxième palier à 990°C a pour le but d'éviter le grossissement excessif des grains du matériau de base et de donner le temps à la diffusion de consolider la brasure. Ensuite, la trempe est destinée à retrouver la martensite. D'autre part, le cycle de revenu après le cycle de brasage est consacré à

restaurer les caractéristiques microstructurales souhaitées de l'acier et à réduire sa dureté afin qu'il soit usinable après assemblage.

En se basant sur les remarques ci-dessus, la configuration C5 a été choisie pour des essais de brasage des éprouvettes principales.

5.1.4. Essais de brasage

Après la campagne des essais de définition des paramètres optimaux, les essais de brasage ont été effectués. Le matériau de base utilisé est toujours l'acier X38CrMoV5.1 et l'alliage LM du NICROBRAZ est choisi comme l'alliage d'apport de l'assemblage brasé. A cause des dimensions plus grandes des éprouvettes principales par rapport celles des éprouvettes simplifiées, tous ces essais de brasage ont été réalisés dans le four de traitement thermique LILLIPUT.

5.1.4.1. Préparation des éprouvettes

Afin d'obtenir les éprouvettes pour des essais mécaniques, nous avons défini la forme et les dimensions des blocs d'acier à usiner qui sont destinés au brasage (Tableau 5.8). Les dimensions de ces blocs sont définies en tenant compte également des dimensions du four et de la zone homogène au niveau de température.

Ces blocs en acier X38 ont été usinés à partir de barreaux de section circulaire de diamètre de 20mm et de 90mm. Les barreaux X38 fournis par le laboratoire ont été façonnés par l'usineur CORMARY. Après le découpage, l'usineur a fait la rectification et le fraisage pour les surfaces des blocs. C'est pourquoi, nous avons dû polir seulement les surfaces de contact (surfaces à braser) manuellement avec les papiers de verre. Les étapes suivantes de préparation des éprouvettes principales sont identiques à celles des éprouvettes simplifiées présentées dans la partie précédente.

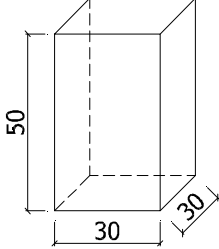
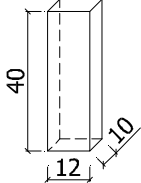
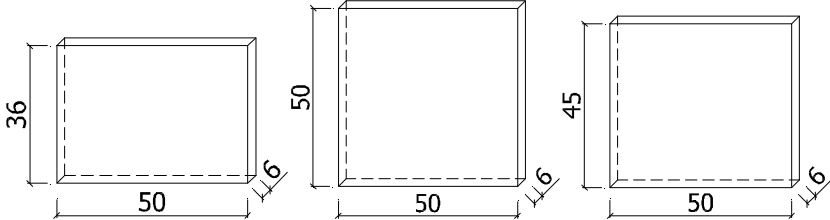
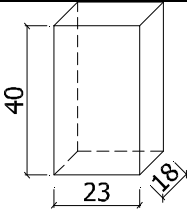
Type d'essai	Forme et dimensions du bloc
Traction	
Compression	
Cisaillement	
Flexion	

Tableau 5.8: Récapitulation des blocs en acier à braser pour des essais mécaniques

Pour la fixation des éprouvettes, nous avons utilisé toujours des plaques en acier en combinant avec des boulons, écrous et rondelles (cf. Figure 5.11). De plus, à cause de grandes dimensions des éprouvettes, il est préférable d'utiliser des plaques minces et rigides et un cadre de fil en acier pour bien fixer, pour empêcher des glissements relatifs horizontaux entre deux blocs du matériau de base. Afin d'éviter l'adhésion entre l'éprouvette et les plaques d'acier, nous avons étendu du nitrure de bore sur les surfaces de contact.

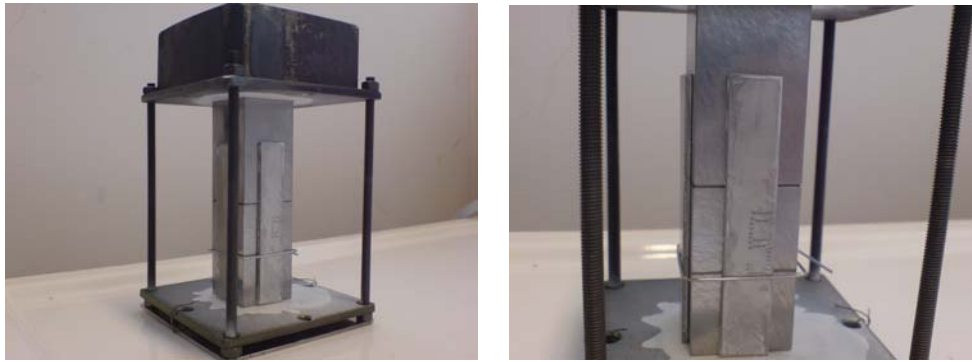


Figure 5.11: Disposition de l'éprouvette de brasage

5.1.4.2. Cycle de brasage

Le cycle de la configuration C5 a été programmé pour piloter des essais de brasage à l'aide de l'armoire électrique du four LILLIPUT. Afin de vérifier l'homogénéisation de la température dans la zone chaude où les éprouvettes ont été mises, on a disposé trois thermocouples (en étiquette de voies 1,3 et 4 respectivement) sur trois faces différentes de l'éprouvette au cours de l'essai. Selon la forme et les dimensions de l'éprouvette brasée, ces trois thermocouples sont situés soit au même niveau soit à différents niveaux par rapport à la surface de la plaque de base. Pour chaque type d'éprouvette à braser, les courbes de température mesurées par les trois thermocouples sont présentées en deux cycles: cycle de brasage et cycle de revenus.

La disposition des thermocouples et les courbes de température mesurées par ces thermocouples au cours des essais de brasage sont présentées dans l'annexe B.

5.1.4.3. Microstructure de l'assemblage brasé

Parmi les éprouvettes brasées pour l'essai de compression, une éprouvette a été choisie pour l'analyse microstructurale. Les étapes de préparation consistent en découpage, enrobage, polissage, nettoyage, essuyage. La surface polie miroir obtenue a été attaquée par une solution Nital contenant 4% d'acide nitrique et 96% d'éthanol. L'éprouvette a ensuite été observée et analysée à l'aide d'un Microscope Electronique à Balayage (MEB).

La Figure 5.12 nous présente la microstructure de l'assemblage brasé, notamment de la zone autour du joint brasé. Le point A caractérise la phase ferritique de l'acier qui contient jusqu'à 88.79% de fer, 5.11% de chrome et 3.32% molybdène. La première couche de diffusion (B), riche en fer (81.83%) avec une petite quantité de nickel (0.45%) ayant diffusée, s'étend sur une

épaisseur d'environ de $25\mu\text{m}$. A l'interface entre cette couche et l'alliage d'apport, on trouve la deuxième couche de diffusion (C). Cette couche mince d'épaisseur de 5 à $8\mu\text{m}$ comprend majoritairement du fer (83.7 %) et plus de nickel (3.31 %) par rapport à la première couche. La couche de l'alliage d'apport (D) contient principalement du nickel (77.94 %) et du fer (10.76 %) ayant diffusé. L'épaisseur de cette couche est de $73\mu\text{m}$ approximativement. Une phase (E) riche en chrome (94.25 %) sous forme de lattes sombres est dispersée dans la couche de l'alliage d'apport.

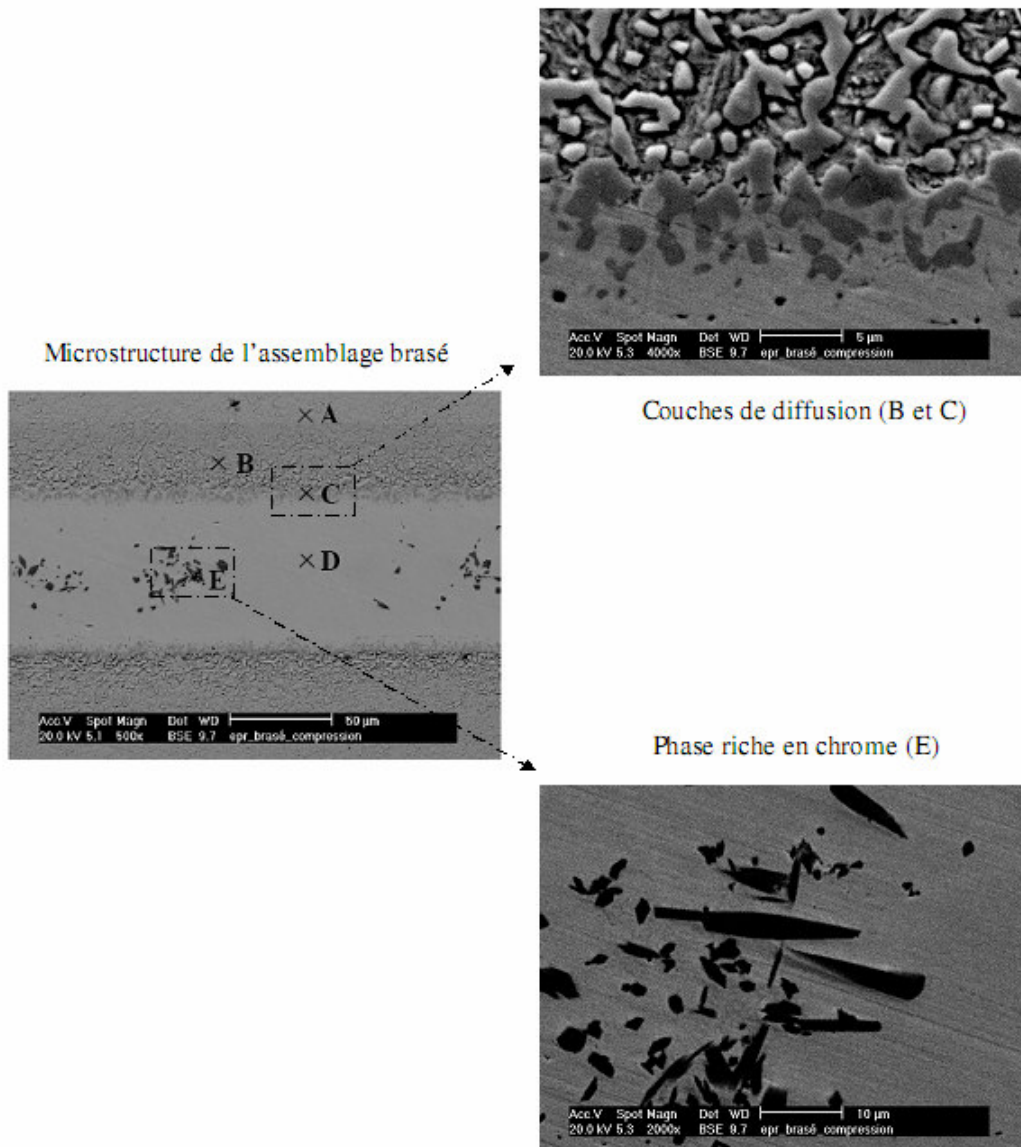


Figure 5.12: Microstructure de l'assemblage brasé

Dans le Tableau 5.9, la teneur en masse des éléments chimiques à chaque point d'analyse est comparé à la composition chimique nominale de l'acier et de l'alliage d'apport LM. La composition de la zone eutectique (présentée par le point D) dans notre étude est cohérente avec les résultats obtenus par (Jang *et al.*, 2003) (Fe 9.0%; Ni 79.6%; Cr 6.4%; Si 5.0%) pour l'assemblage brasé acier AISI 304/alliage BNi-2.

Elément (% mas.) Location	Fe	Ni	Cr	Si	Mo	C	V
A	88.79	-	5.11	1.59	3.32	0.67	0.52
B	81.83	0.45	7.44	1.00	6.33	0.76	1.47
C	83.70	3.31	7.83	0.34	2.64	0.45	0.96
D	10.76	77.94	5.13	5.35	-	0.59	-
E	1.45	3.83	94.25	-	-	0.47	-
Acier	Base	-	5	1.0	1.3	0.4	0.4
Alliage d'apport	3	Base	7	4.5	-	0.03	-

Tableau 5.9: Teneur en masse des éléments dans chaque phase de l'assemblage brasé et la composition chimique nominale de l'acier et de l'alliage d'apport (mesurée par EDX avec MEB — analyse semi-quantitative)

5.2. Caractérisation des propriétés de l'assemblage brasé acier H11/alliage d'apport BNi-2

5.2.1. Essais mécaniques

5.2.1.1. Machines d'essais

Les essais mécaniques ont été effectués à l'aide de deux machines: INSTRON modèle 5800R et MTS-810.

La machine INSTRON 5800R, qui est présentée sur la Figure 5.13, est idéale pour mettre à l'essai des applications les plus exigeantes impliquant des métaux, des biomatériaux, de la microélectronique, les adhésifs, les composites (Instron, 2009). Etant équipée de deux cellules de

chargement de capacité maximale 500 N et 30 kN respectivement, elle convient à plusieurs types d'essais: traction, compression, flexion...Le chargement est transmis de la cellule à l'éprouvette testée par un banc de charge équipé d'une traverse mobile. La machine est pilotée par une console de commande et par le logiciel BLUEHILL sur un ordinateur de type PC. La console qui permet de calibrer, configurer et contrôler les tests est équipée d'un panneau principal et d'une interface de contrôle à distance. Le logiciel BLUEHILL est destiné à l'acquisition, la commande et l'analyse. Les déplacements mesurés par un extensomètre ou directement par le déplacement de la traverse sont enregistrés et présentés sous forme de courbe charge - déplacement pendant l'essai.

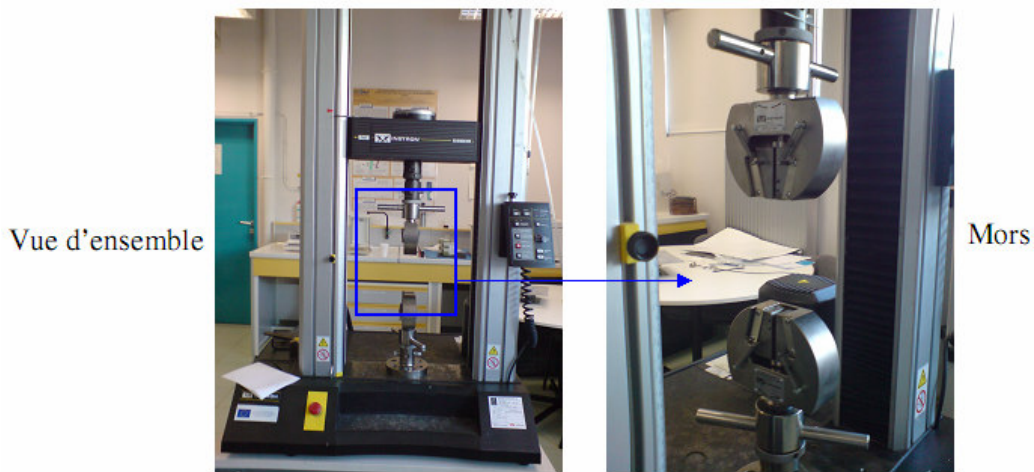


Figure 5.13: Machine d'essais INSTRON 5800R

La machine MTS-810 (Figure 5.14) est utilisée pour des essais mécaniques en statique ou en dynamique, à la température ambiante ou à hautes températures (jusqu'à 1200°C). Elle convient à plusieurs matériaux dans la vaste gamme de résistance: plastique, aluminium, composite et acier. La hauteur globale de la machine est de 3.023 m tandis que l'espace réservé à l'essai mesure 1.625 m de hauteur et 0.635 m de largeur. La capacité maximale atteinte par la cellule de charge est de 250 kN . Le déplacement de montée ou de descente de la crosse est assuré par deux vérins hydrauliques. La machine est pilotée par MTS Micro Console 458 et par les logiciels TestStar et Testware sur un PC (Auscal, 2008).



Figure 5.14: Machine d'essais MTS-810

5.2.1.2. Essai de traction

L'essai de traction est destiné à déterminer le module d'Young E et la résistance à la traction R_{mt} .

- ***Eprouvettes***

Les éprouvettes de traction ont été taillées dans un assemblage brasé de deux blocs d'épaisseur 50 mm . A chaque extrémité, une petite distance de 3 à 5 mm est réservée pour éviter l'influence de l'effet de bord sur la qualité du joint brasé. La distance entre deux éprouvettes adjacentes est d'un millimètre (Figure 5.15).

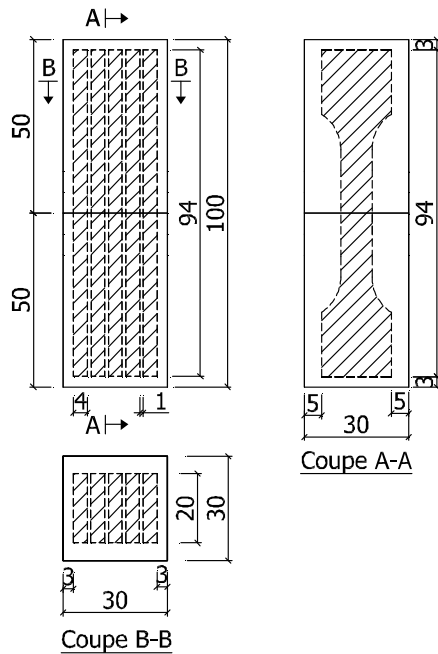


Figure 5.15: Plan de découpe des éprouvettes de traction

Les éprouvettes de traction ont été dimensionnées conformément à la norme (AFNOR, 1990). L'épaisseur de leur section rectangulaire est de 4 mm . Le joint brasé se trouve au milieu de la partie utile de longueur 36 mm de l'éprouvette. La largeur de cette partie est de 9 mm tandis que celle de la tête d'amarrage est de 20 mm (voir Figure 5.16).

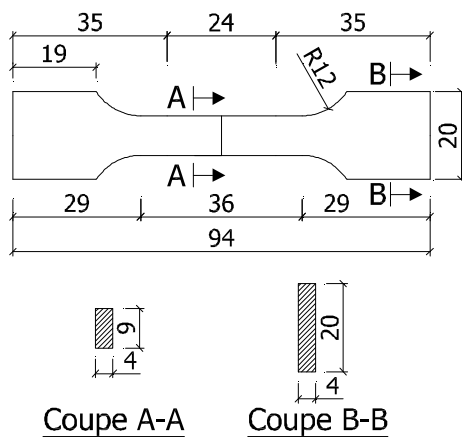


Figure 5.16: Eprouvettes de traction

- **Description de l'essai**

L'essai de traction a été effectué à l'aide de la machine INSTRON (Figure 5.17). Après avoir mesuré et numéroté les quatre éprouvettes, nous avons réalisé l'essai de traction pour chacune d'entre elles. L'éprouvette est maintenue par les mors de la machine. Il faut que l'axe symétrique longitudinal de l'éprouvette coïncide avec l'axe des mors pour éviter la flexion ou la torsion de l'éprouvette au cours de l'essai. Afin de mesurer le déplacement, un extensomètre de base $L_0 = 12.5(mm)$ a été suspendu à la partie utile de l'éprouvette. La vitesse de l'essai a été définie constante de $2 mm/min$. L'éprouvette a été tirée jusqu'à la rupture.

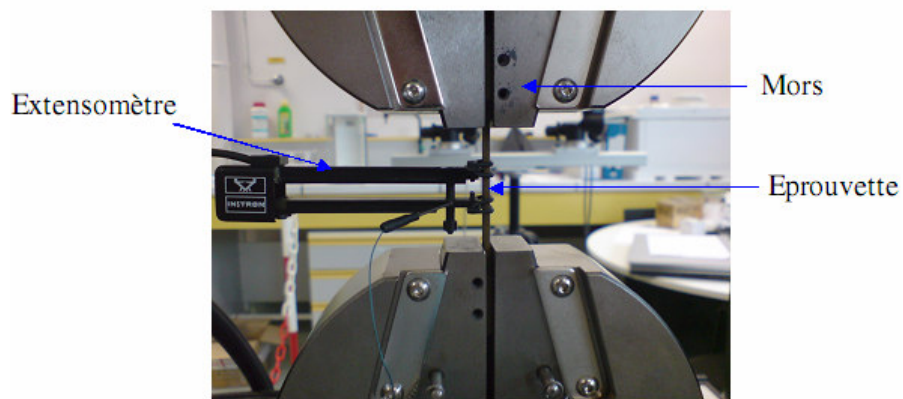


Figure 5.17: Essai de traction

- **Résultats**

Les résultats de l'essai de traction sont présentés sur la Figure 5.18 ci-dessous. Nous constatons que la dispersion des résultats en terme de résistance R_{mt} est considérable. La contrainte maximale atteinte par la traction de l'éprouvette 1 est de $459 MPa$ tandis que cette valeur pour l'éprouvette 3 n'est que $182 MPa$. Pour toutes les éprouvettes, la courbe de traction obtenue est presque linéaire jusqu'à la rupture. Cependant, les courbes des éprouvettes 3 et 4 présentent de petits parasites. Cela peut être expliqué par le glissement de l'extensomètre au cours de l'essai. De toute façon, le comportement de l'assemblage brasé en traction est le type élastique linéaire suivi d'une rupture fragile.

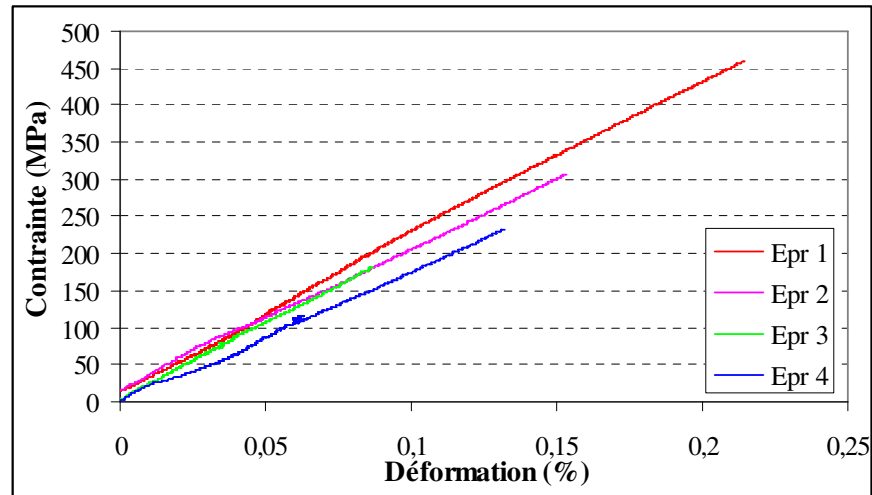


Figure 5.18: Courbes de traction

En se basant sur les courbes ci-dessus, les propriétés mécaniques en traction de chacune parmi quatre éprouvettes brasées, et aussi les valeurs moyennes sont calculées. En comparant ces valeurs avec les propriétés de l'acier de base (MatWeb), nous constatons que l'assemblage brasé est moins résistant que le matériau de base. Les résultats sont résumés dans le Tableau 5.10 suivant.

	Ep. 1	Ep. 2	Ep. 3	Ep. 4	Valeur moyenne	Acier de base
Module d'Young (MPa)	202966	190711	193158	177831	191167	215000
Contrainte maximale (MPa)	459	307	182	232	295	1990

Tableau 5.10: Récapitulatif des propriétés mécaniques en traction

Comme les valeurs mesurées de la contrainte maximale sont fortement dispersées, nous calculons l'écart-type pour ces valeurs par:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} = 104 \quad (5.1)$$

où n est le nombre de valeurs mesurées, X_i est une valeur mesurée et \bar{X} est la valeur moyenne.

La valeur élevée de l'écart-type σ_x présente une forte dispersion des valeurs mesurées pour la contrainte maximale en traction.

5.2.1.3. Essai de compression

Le but de cet essai consiste à déterminer la limite d'élasticité σ_e .

- **Eprouvettes**

Les cinq éprouvettes de compression ont été découpées à partir d'un assemblage de deux blocs par électroérosion à fil. Chaque bloc possède une largeur de 10 mm , une épaisseur de 12 mm et une longueur de 40 mm (voir Figure 5.19).

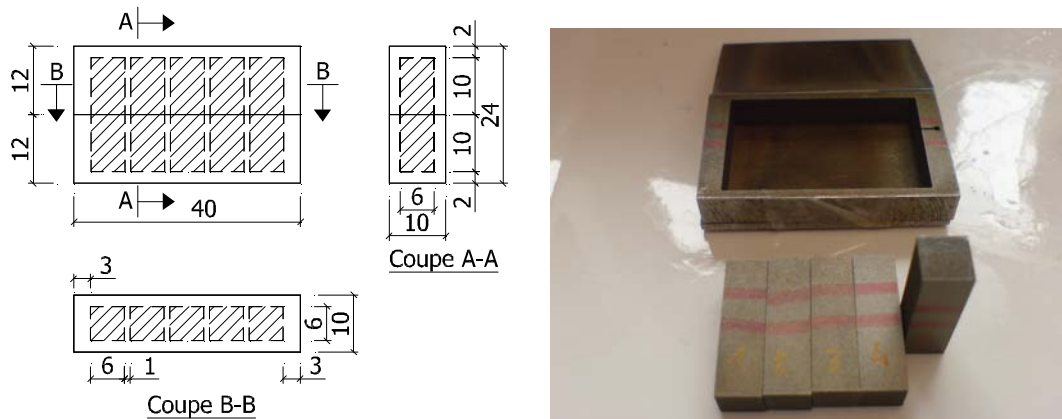


Figure 5.19: Plan de découpe des éprouvettes de compression

Pour les essais de compression, nous avons utilisé des éprouvettes sous forme de parallélépipède dont la longueur est de 20 mm et la section carrée de côté 6 mm . Un joint brasé se trouve au milieu de l'éprouvette (Figure 5.20).

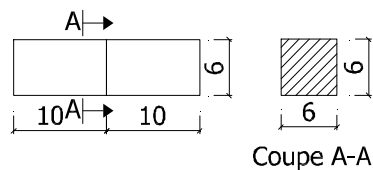


Figure 5.20: Eprouvette de compression

- **Description de l'essai**

L'essai de compression a été réalisé à l'aide de la machine MTS-810. La Figure 5.21 présente l'éprouvette de compression, mise entre les deux plateaux de la machine. Nous avons calé l'éprouvette par deux rondelles d'acier pour protéger les surfaces des plateaux. Etant donné que la longueur de l'éprouvette est relativement faible, nous n'avons pas utilisé d'extensomètre. Dans

ce cas, il faut tenir compte du déplacement de la traverse pour tracer la courbe contrainte – déformation. Afin d’assurer la stabilité en compression, la vitesse de l’essai est maintenue de 0.25 mm/min . L’essai de compression a été arrêté au moment où l’éprouvette a commencé à flamber.

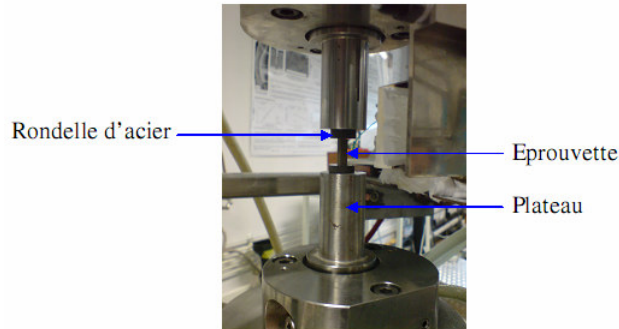


Figure 5.21: Essai de compression

- **Résultats**

Les courbes contrainte – déformation en compression de cinq éprouvettes sont présentées sur la Figure 5.22. En négligeant les valeurs parasites au début de l’essai qui ont été engendrées par la non-application de précharge sur les éprouvettes, chaque courbe peut être divisée en deux parties: partie linéaire correspondante au domaine élastique et partie non linéaire qui correspond au domaine plastique.

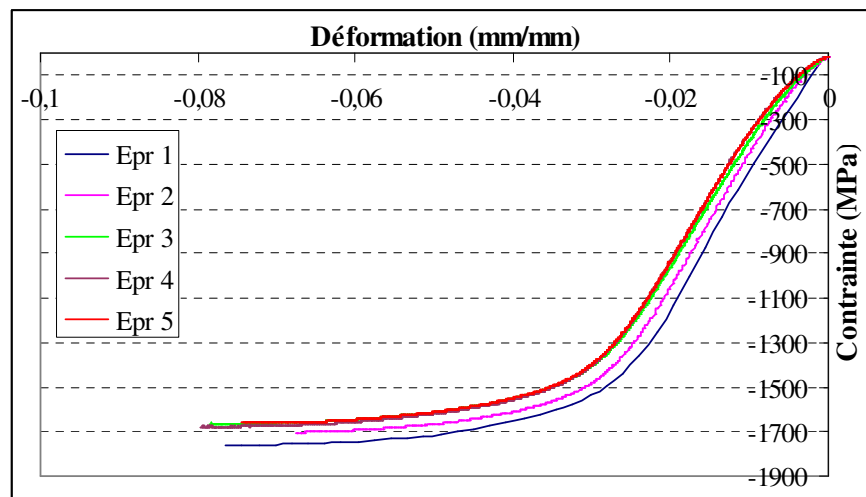


Figure 5.22: Courbes contrainte – déformation en compression

Dans ce cas, nous ne distinguons pas un comportement singulier lié au joint parce que sa fraction volumique est très faible par rapport à celle de l'acier.

La limite d'élasticité de l'assemblage brasé obtenue par l'essai de compression est comparée avec celle de l'acier dans le Tableau 5.11.

	Ep. 1	Ep. 2	Ep. 3	Ep. 4	Ep. 5	Valeur moyenne	Acier
Limite d'élasticité (MPa)	1355	1265	1228	1235	1225	1262	1650

Tableau 5.11: Limite d'élasticité des éprouvettes brasées en compression

5.2.1.4. Essai de cisaillement

L'essai de cisaillement a pour but de mesurer la résistance mécanique au cisaillement et le module de cisaillement.

- ***Eprouvettes***

Les éprouvettes de cisaillement sont obtenues par le découpage d'un assemblage brasé de quatre plaques d'épaisseur de 6 mm. Afin d'éviter l'effet de bord, on a enlevé 3 mm pour chaque côté.

La distance entre deux éprouvettes adjacentes est d'un millimètre (Figure 5.23).

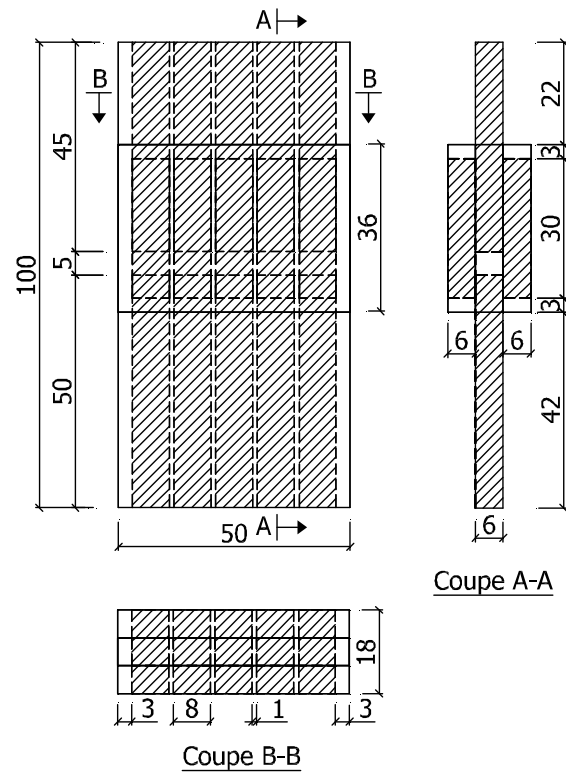


Figure 5.23: Plan de découpe des éprouvettes de cisaillement

En s'appuyant sur les travaux de (Nafi, 2005), nous avons choisi l'éprouvette brasée à double recouvrement pour l'essai de cisaillement. Ce type d'éprouvette, présentée sur la Figure 5.24, permet au joint de supporter le cisaillement pur en négligeant tous les effets de flexion parasites comme pour l'éprouvette à simple recouvrement. Avec la longueur totale de 100 mm, l'éprouvette contient deux zones de recouvrement: l'une de longueur 5 mm (zone A) et l'autre de longueur 20 mm (zone B). La dissymétrie de l'éprouvette a pour but de garantir la rupture dans la zone A.

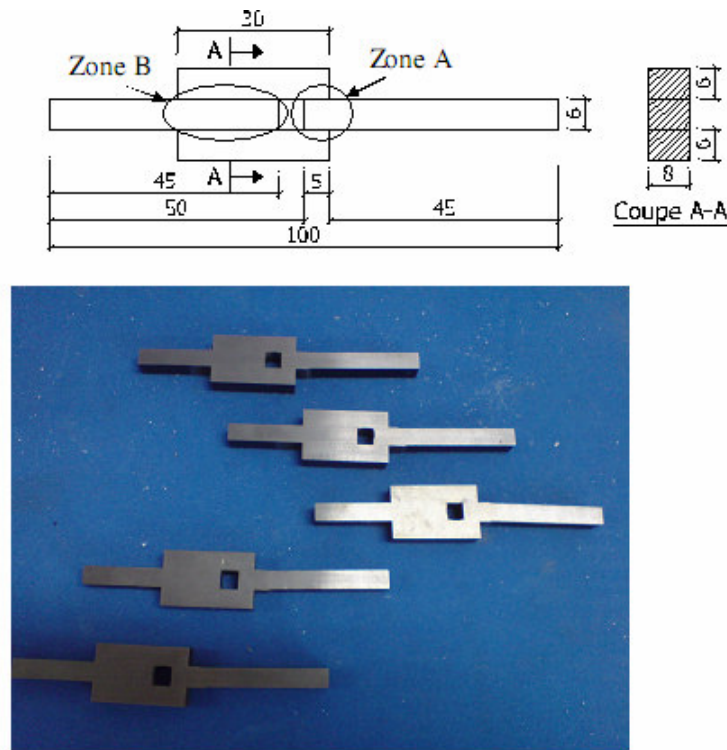


Figure 5.24: Eprouvette de cisaillement

- *Description de l'essai*

La Figure 5.25 présente l'essai de cisaillement effectué à l'aide de la machine INSTRON. Etant tenue par les mors de la machine, l'éprouvette a été sollicitée par la traction selon la direction parallèle à la surface du joint brasé. Le déplacement est mesuré par un extensomètre dont la longueur de base est $L_0 = 12.5(mm)$. La vitesse de l'essai a été choisie de $1mm/min$. L'essai s'est déroulé jusqu'à la rupture de l'éprouvette.



Vue de face



Vue latérale

Figure 5.25: Essai de cisaillement

- **Résultats**

La Figure 5.26 présente les courbes de charge – déplacement de cinq éprouvettes en cisaillement. Toutes les cinq éprouvettes présentent la courbe de cisaillement relativement linéaire jusqu'à la rupture.

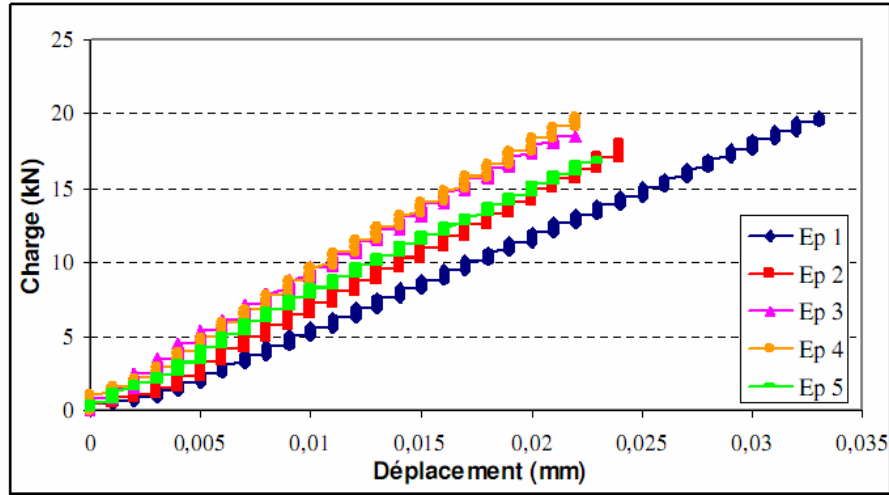


Figure 5.26: Courbe de charge – déplacement au cas de cisaillement

Pour l'essai de cisaillement, nous nous intéressons à la valeur de la contrainte maximale et au module de cisaillement. La contrainte maximale au cisaillement τ_{\max} qui est calculée par la formule suivante:

$$\tau_{\max} = \frac{F_{\max}}{S_c} \quad (5.2)$$

où F_{\max} est la charge maximale et S_c est la surface de contact ($S_c = 2 * 5 * 8 \text{ mm}^2$).

Le module de cisaillement "moyen" de l'assemblage est déterminé par la pente de la courbe contrainte – déformation.

Les valeurs de ces deux grandeurs pour chaque éprouvette sont calculées et résumées dans le Tableau 5.12 ci-dessous.

La dispersion des résultats en terme de contrainte maximale est relativement faible (la valeur de l'écart-type est égale à 14). Nos résultats sont plus faibles que les contraintes maximales au cisaillement (de 306 à 481 MPa) de l'assemblage brasé acier 422SS/alliage BNi-2 dans les travaux de (Ou *et al.*, 2006). L'existence des porosités dans les joints brasés de nos éprouvettes de cisaillement est la raison de ces résultats moins bons qu'attendus.

	Ep. 1	Ep. 2	Ep. 3	Ep. 4	Ep. 5	Valeur moyenne
Contrainte maximale (MPa)	248	224	231	247	212	232
Module de cisaillement (MPa)	96396	118571	135657	138996	116388	121201

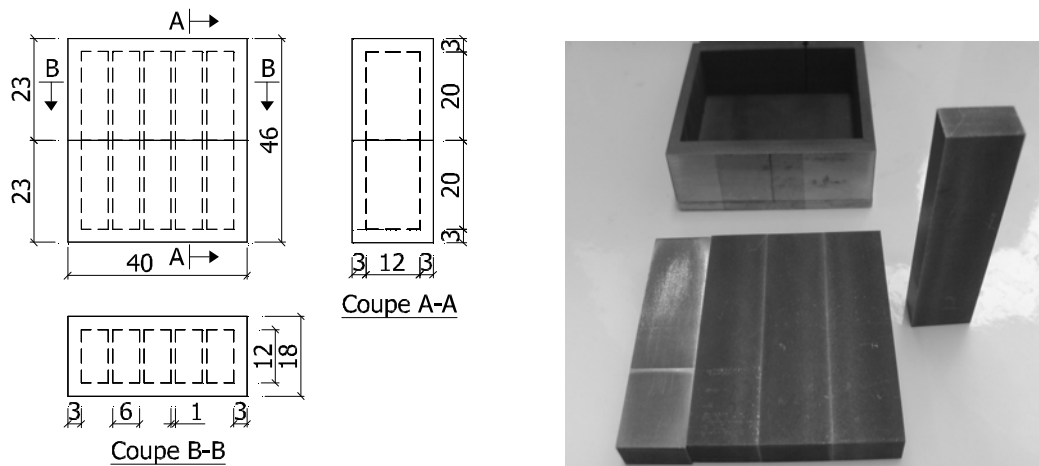
Tableau 5.12: Récapitulation des caractéristiques mécaniques au cisaillement

5.2.1.5. Essai de flexion

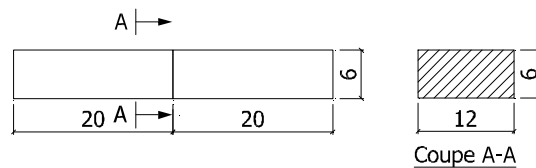
L'essai de flexion nous aide à déterminer la résistance en flexion et la flèche maximale.

• Eprouvettes

L'assemblage brasé était formé par deux plaques de dimensions $40 \times 23 \times 18 (mm)$. Cinq épreuves de flexion ont été découpées de cet assemblage par électroérosion à fil (Figure 5.27).


Figure 5.27: Plan de découpe des épreuves de flexion

L'éprouvette de section rectangulaire $12 \times 6 mm$ a été choisie pour l'essai de flexion. Le joint brasé est au milieu de la longueur $40 mm$ (Figure 5.28).


Figure 5.28: Eprouvette de flexion

- **Description de l'essai**

L'éprouvette a été placée sur deux appuis de distance $D = 35(mm)$ qui sont attachés à deux supports fixes. Le support mobile est appuyé sur l'éprouvette par deux points de distance $d = 23(mm)$ (voir Figure 5.29). La vitesse de mise en charge de $5mm/min$ a été appliquée pour toute la procédure de l'essai. Les flèches des éprouvettes ont été déterminées à partir du déplacement de la traverse.

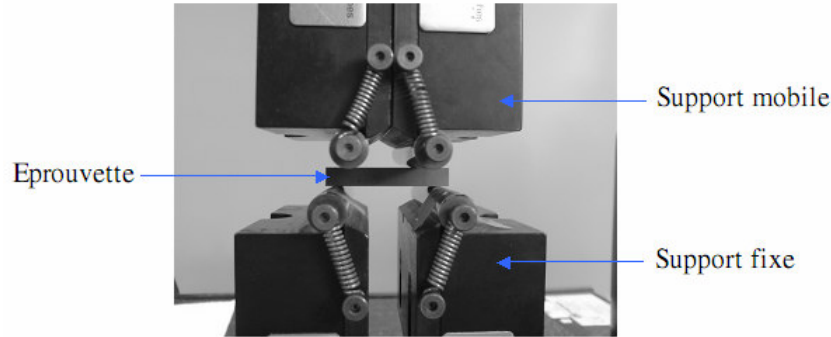


Figure 5.29: Essai de flexion

- **Résultats**

Les résultats sous forme des courbes charge - flèche de l'essai de flexion sont présentés sur la Figure 5.30.

Pour toutes les éprouvettes, la courbe charge - flèche comprend une partie plutôt non linéaire due au petit glissement relatif entre l'éprouvette et les appuis au début de l'essai et une partie à peu près linéaire jusqu'à la rupture.

Le module d'Young de l'assemblage brasé mesuré par l'essai de flexion est relativement faible par rapport à celui de l'acier de base ($80712MPa$ par rapport à $215000MPa$). La contrainte et la déformation maximales en flexion sont respectivement calculées par:

$$\begin{cases} \sigma_{\max} = \frac{3F_{\max}(D-d)}{2bh^2} \\ \epsilon_{\max} = \frac{12hf_{\max}}{3D^2 - (D-d)^2} \end{cases} \quad (5.3)$$

où F_{\max} est la charge maximale, b et h sont respectivement la largeur et la hauteur de la section transversale de l'éprouvette, f_{\max} est la flèche maximale.

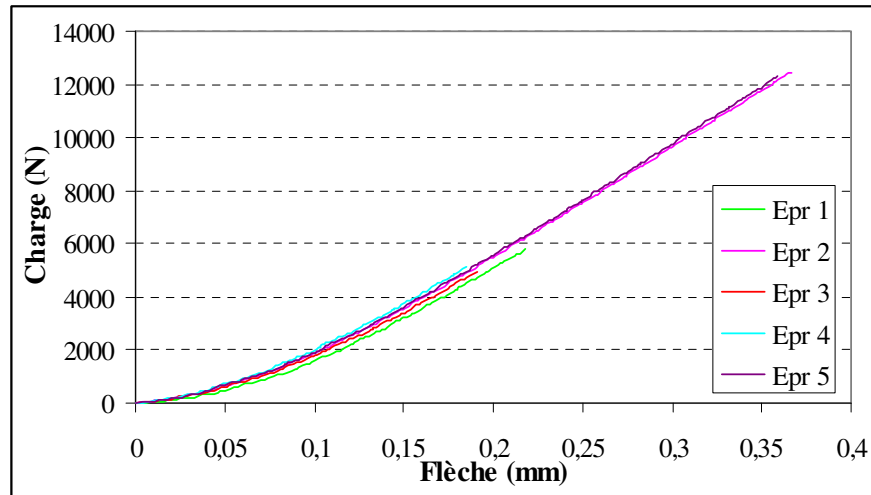


Figure 5.30: Courbes charge - flèche en flexion

Les caractéristiques mécaniques issues de l'essai de flexion sont groupées dans le Tableau 5.13 ci-dessous. Les valeurs de la contrainte maximale obtenues dans cet essai sont très variées pour des éprouvettes différentes. La dispersion maximale atteint 60 % et l'écart-type est grande (145). La valeur moyenne de la flèche maximale pour cinq éprouvettes est de 0.264 mm en correspondant à la déformation de 0.538 %.

	Ep. 1	Ep. 2	Ep. 3	Ep. 4	Ep. 5	Valeur moyenne
Contrainte maximale (MPa)	241	518	206	213	510	338
Flèche maximale (mm)	0.218	0.367	0.191	0.185	0.359	0.264
Déformation maximale (%)	0.445	0.748	0.389	0.377	0.732	0.538

Tableau 5.13: Récapitulation des caractéristiques mécaniques en flexion

5.2.2. Mesure de la conductivité thermique

L'essai basé sur la méthode de la plaque chaude gardée est destiné à la mesure de la conductivité thermique λ de l'assemblage brasé. Les lecteurs peuvent trouver le principe principal de ce type d'essai dans les travaux de (Klarsfeld *et al.*, 2002).

- **Moyen et principe de mesure**

La mesure est effectuée à l'aide d'un conductivimètre (Figure 5.31) au laboratoire LMEE (Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry).



Figure 5.31: Conductivimètre

La Figure 5.32 ci-dessous représente le schéma de principe du dispositif de mesure. Le principe consiste à imposer un flux de chaleur à travers les deux échantillons dont on souhaite connaître la conductivité thermique λ . L'hypothèse de base de la méthode repose sur le fait que les deux échantillons ont une conductivité identique. On ne mesurera par conséquent que la conductivité moyenne des deux échantillons.

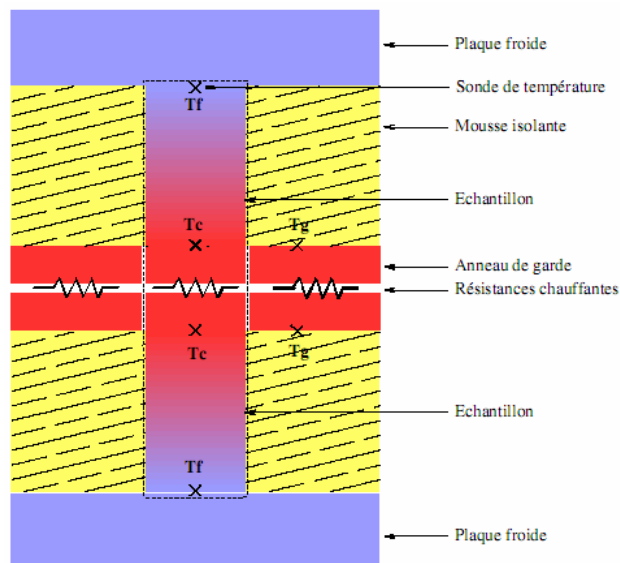


Figure 5.32: Coupe verticale du dispositif expérimental.

- **Echantillons**

Pour la mesure de la conductivité thermique, nous avons préparé deux échantillons sous forme cylindrique de dimensions *quasi identiques*. Le diamètre du cylindre est de 40mm tandis que sa longueur est de 62mm . Le joint brasé se situe au milieu de la longueur de l'échantillon (Figure 5.33).

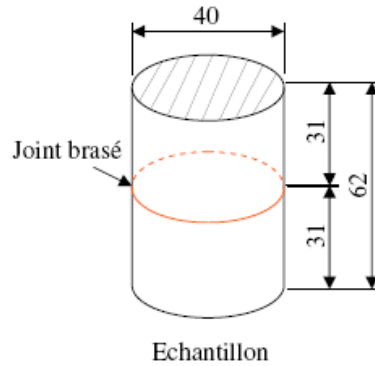


Figure 5.33: Echantillon de mesure de la conductivité thermique

- **Description de la mesure**

La Figure 5.34 présente la description de la mesure. Les deux échantillons ont été mis au milieu des mousses isolantes. Nous avons chauffé, par effet Joule, les plaques situées entre les deux échantillons et mesuré la valeur de cette puissance P . Le régime permanent a été obtenu grâce aux plaques froides situées aux deux extrémités des échantillons cylindriques. Nous avons utilisé les deux thermocouples pour mesurer les températures de la face chaude (T_c) et de la face froide (T_f) de chaque échantillon. Afin d'éviter les fuites thermiques à l'extérieur, tous les équipements ont été mis dans une cage sous vide. Un logiciel spécifique est destiné à l'acquisition des résultats de la mesure.

Lorsque l'équilibre est atteint, la conductivité λ peut être calculée par la relation:

$$\lambda = \frac{PL}{2S(T_c - T_f)} \quad (5.4)$$

où L est la longueur et S est la section transversale de l'échantillon.

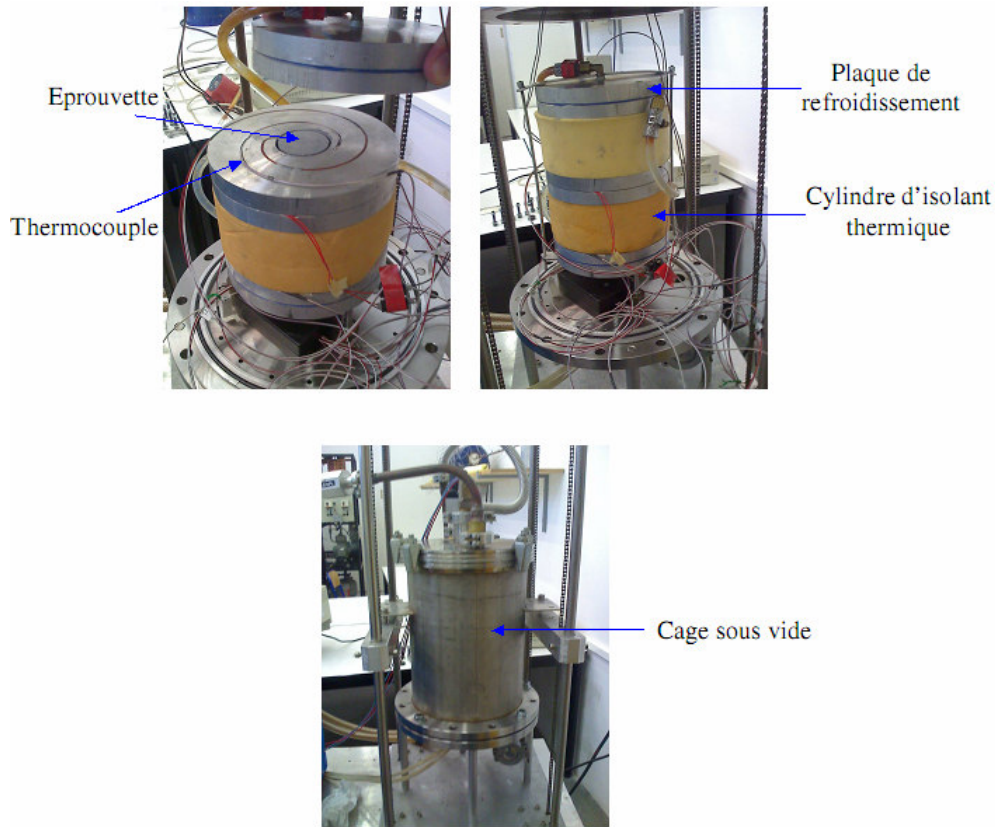


Figure 5.34: Essai de mesure de la conductivité thermique

• **Résultats**

Nous avons réalisé la mesure pour deux cas de tension électrique appliquée: $U_1 = 10.02V$ et $U_2 = 15.02V$. Le Tableau 5.14 nous montre que les valeurs obtenues de conductivité pour deux éprouvettes sont cohérentes dans les deux cas différents de tension électrique (l'écart est de 1.15%).

Tension électrique (V)	Conductivité thermique ($W / m.^{\circ}C$)		
	Ep. 1	Ep. 2	Valeur moyenne
10.02	27.874	27.364	27.462
15.02	27.379	27.232	

Tableau 5.14: Conductivité thermique mesurée

Le modèle numérique de cette mesure correspond au cas étudié dans la Section 4.2.2.1 du chapitre 4. Il s'agit d'un modèle en régime permanent avec les températures imposées en haut et en bas. Les faces latérales sont isolées thermiquement. Cependant, dans cette étude, la confrontation entre les résultats de la mesure thermique et ceux de la simulation numérique n'est pas abordée.

5.3. Validation des résultats

La validation des résultats est effectuée sur la base de deux essais: traction et cisaillement. La démarche de la validation consiste en deux processus:

- Identification des paramètres après assemblage

Puisque les modules d'Young de l'acier et de l'alliage d'apport après assemblage sont différents par rapport à leurs valeurs initiales avant brasage, il nous faut effectuer un processus d'identification des paramètres des composants de l'assemblage. Ces paramètres identifiés sont ensuite utilisés pour les simulations numériques du processus de confrontation.

- Confrontation entre les résultats expérimentaux et la simulation numérique

Le but de ce processus est de comparer les résultats expérimentaux issus des essais de traction et de cisaillement avec les simulations qui sont effectuées par le couplage DAR-X-FEM et par la FEM standard.

5.3.1. Essai de traction

5.3.1.1. Identification

La mise en œuvre du processus d'identification exploite les résultats de l'essai de traction qui est présenté dans la section 5.2.1.2.

5.3.1.1.1. Problème général d'identification

L'identification des paramètres consiste à résoudre un problème inverse selon une technique de minimisation mettant en jeu, d'une part, les résultats expérimentaux obtenus lors de l'essai, et d'autre part, les résultats issus de la simulation numérique. Le processus d'identification n'est effectué que sur les variables mesurables du modèle.

A partir de N couples de valeurs expérimentales $(\xi_i - z_i)$ (par exemple: déplacement - charge) correspondants à N mesures, nous cherchons n paramètres (C_1, C_2, \dots, C_n) tels qu'une relation:

$$F(\xi_i, C) = z_i \quad \text{avec } C = (C_1, C_2, \dots, C_n) \quad (5.5)$$

soit "presque" vérifiée pour $i = 1, 2, \dots, N$ avec $N \gg n$.

Comme dans l'équation (5.5), l'égalité n'est jamais atteinte, le problème d'identification souvent revient à chercher C^* qui minimise la quantité:

$$J(C) = \sum_{j=1}^N \|F(\xi_j, C) - z_j\|^2 \quad (5.6)$$

La résolution de (5.6) est basée sur une méthode de type moindres carrés, la méthode de Levenberg-Marquardt qui est détaillée dans les travaux tels que: (Levenberg, 1944), (Marquardt, 1963) et (More, 1977). L'algorithme de cette méthode consiste à calculer à partir de C^0 , valeur initiale choisie de façon pertinente par rapport au problème, la suite C^k qui est définie par:

$$C^{k+1} = C^k + \delta^k \quad (5.7)$$

avec δ^k qui vérifie:

$$(J''(C^k) + \lambda^k I) \delta^k = -\nabla J(C^k) \quad (5.8)$$

où $\nabla J(C^k)$ est le gradient de $J(C)$ en C^k , J'' est la matrice hessienne, λ^k est la grandeur scalaire non négative qui commande l'importance de la direction δ^k et I est la matrice d'identité. Dans notre étude, l'identification des paramètres basant sur la méthode de Levenberg-Marquardt a été effectuée à l'aide de la routine d'optimisation `lsqcurvefit` dans Matlab.

5.3.1.1.2. Formulation

Afin de mettre en oeuvre le processus d'identification, il faut définir une loi qui relie les paramètres avec les données expérimentales. Revenons à l'essai de traction dans la section 5.2.1.2, nous avons deux paramètres à identifier: les modules d'Young E_a et E_j de l'acier et du joint brasé après l'assemblage respectivement. Les données expérimentales utilisées doivent être des variables mesurables. Dans ce cas, nous exploitons les valeurs de la charge appliquée P (en N) et du déplacement total u_T (en mm) mesuré par l'extensomètre de base $L_0 = 12.5 mm$. Le schéma de la partie de l'éprouvette de traction mesurée par l'extensomètre est présenté sur la Figure 5.35.

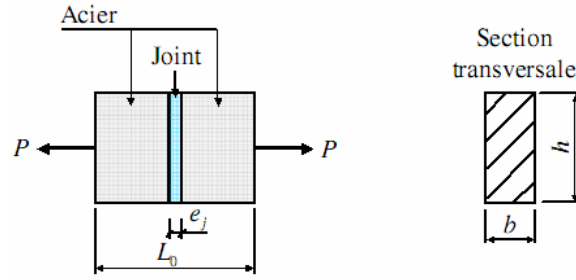


Figure 5.35: Partie de l'éprouvette de traction mesurée par l'extensomètre

L'épaisseur e_j du joint est mesurée à l'aide de l'observation sous MEB. En tenant compte des couches de diffusion (cf. la section 5.1.4.3), cette valeur est de $e_j = 0.139 \text{ mm}$.

Notons u_a et u_j les déplacements de l'acier et du joint, respectivement, ils sont donc calculés par:

$$\begin{cases} u_a = \frac{Pl_a}{bhE_a} \\ u_j = \frac{Pe_j}{bhE_j} \end{cases} \quad (5.9)$$

où $l_a = L_0 - e_j$ est la longueur initiale de l'acier, $b = 4 \text{ mm}$ et $h = 9 \text{ mm}$ sont respectivement la largeur et la hauteur de la section transversale de l'éprouvette.

Comme nous avons $u_T = u_a + u_j$, la loi pour l'identification des modules d'Young E_a et E_j peut être déduite:

$$u_T = \frac{P}{bh} \left(\frac{l_a}{E_a} + \frac{e_j}{E_j} \right) \Leftrightarrow P = \frac{bh}{\left(\frac{l_a}{E_a} + \frac{e_j}{E_j} \right)} u_T \quad (5.10)$$

Signalons que la loi (5.10) présente une relation linéaire entre la charge P et le déplacement total u_T . Ceci est cohérent avec la remarque que le comportement de l'assemblage brasé en traction est de type élastique linéaire (voir la section 5.2.1.2).

5.3.1.1.3. Résultats

Nous avons effectué le processus d'identification pour chaque éprouvette parmi les quatre de l'essai de traction. La Figure 5.36 montre la comparaison sur la courbe charge – déplacement entre les données expérimentales et la simulation d'identification de l'éprouvette 1. Nous

constatons une concordance relativement bonne entre les deux résultats. Nous avons trouvé la même situation pour les autres éprouvettes.

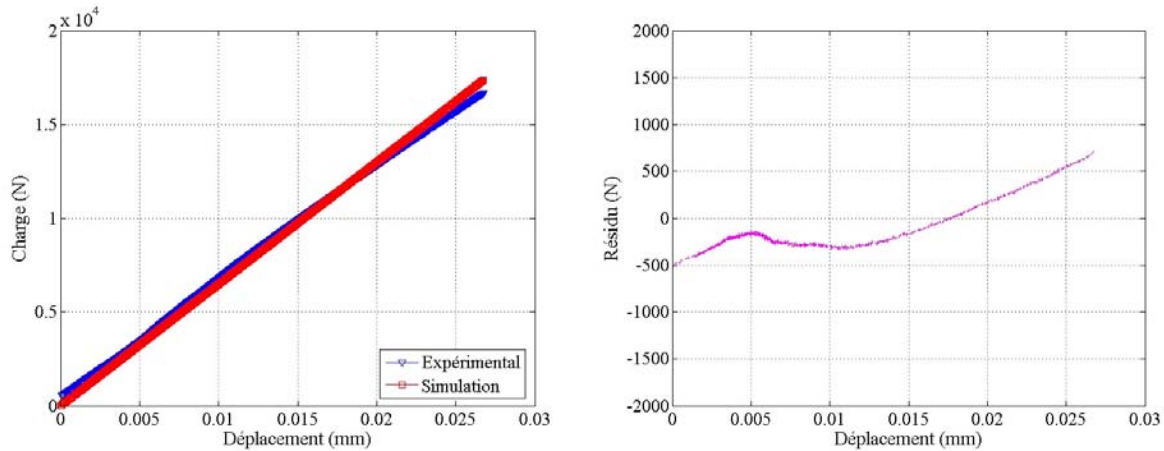


Figure 5.36: Résultats d'identification en traction de l'éprouvette 1

Les valeurs des modules d'Young issues du processus d'identification pour les quatre éprouvettes et ainsi la valeur moyenne sont comparées avec les modules d'Young initiaux de l'acier (MatWeb) et de l'alliage d'apport (Jiang *et al.*, 2008) avant assemblage dans le Tableau 5.15. Le module d'Young de l'acier après assemblage est proche de celui initial. Par contre, le module d'Young du joint après assemblage est largement plus faible que celui de l'alliage d'apport avant assemblage.

	Après assemblage					Avant assemblage
	Ep. 1	Ep. 2	Ep. 3	Ep. 4	Valeur moyenne	Valeur de référence
E_a (MPa)	228155	212305	220183	179886	210130	215000
E_j (MPa)	111201	99956	101827	95840	102206	205100

Tableau 5.15: Modules d'Young de l'acier et du joint issus de l'essai de traction

5.3.1.2. Confrontation

La géométrie du modèle considéré est présentée sur la Figure 5.35. Nous utilisons les valeurs moyennes du module d'Young $E_m = 191167 \text{ MPa}$ et de la contrainte maximale $\sigma_m = 295 \text{ MPa}$, appelée la contrainte appliquée, pour construire la courbe expérimentale de contrainte – déformation. En acceptant le comportement élastique linéaire de l'assemblage brasé, la déformation maximale correspondante à la contrainte appliquée est donnée par:

$$\epsilon_{\max} = \frac{\sigma_m}{E_m} = \frac{295}{191167} \cdot 100\% = 0.15(\%) \quad (5.11)$$

Pour la simulation numérique, nous utilisons les modules d'Young E_a et E_j identifiés dans la section 5.3.1.1 (cf. Tableau 5.15) et la contrainte appliquée σ_m comme la condition aux limites.

Nous considérons deux cas de calcul: déformation plane et contrainte plane.

Le modèle du couplage DAR-X-FEM est discrétisé en 361 éléments rectangulaires linéaires et 400 nœuds dont 40 nœuds enrichis (Figure 5.37).

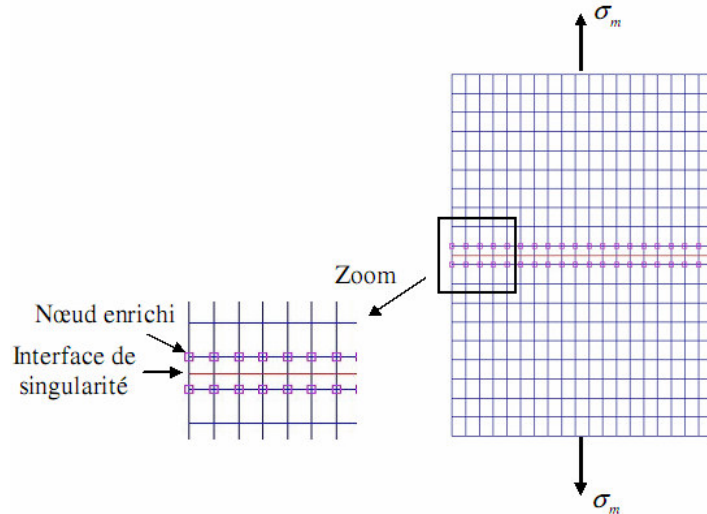


Figure 5.37: Maillage du couplage DAR-X-FEM

Dans ce modèle, le joint brasé est remplacé par l'interface de singularité au travers de laquelle le champ du déplacement est discontinu. Pour le cas des déformations planes, les sauts de déplacement sont donnés par la formule (4.37) de la section 4.3.1. Pour le cas des contraintes planes, les sauts du déplacement sont calculés par:

$$\left\{ \begin{aligned} \llbracket u_1 \rrbracket &= \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \begin{aligned} &\frac{E_1(1+\nu_2) - E_2(1+\nu_1)}{E_2(1+\nu_1)} \left[u_{1,2}^{0-}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0-}(x_1, 0) \right] \\ &+ \frac{E_3(1+\nu_2) - E_2(1+\nu_3)}{E_2(1+\nu_3)} \left[u_{1,2}^{0+}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0+}(x_1, 0) \right] \end{aligned} \right\} \\ \llbracket u_2 \rrbracket &= \frac{\varepsilon}{2} \left\{ \begin{aligned} &\left[\frac{\frac{E_1\nu_1}{1-\nu_1^2} - \frac{E_2\nu_2}{1-\nu_2^2}}{\frac{E_2}{1-\nu_2^2}} u_{1,1}^{0-}(x_1, 0) + \frac{\frac{E_1}{1-\nu_1^2} - \frac{E_2}{1-\nu_2^2}}{\frac{E_2}{1-\nu_2^2}} u_{2,2}^{0-}(x_1, 0) \right] \\ &+ \left[\frac{\frac{E_3\nu_3}{1-\nu_3^2} - \frac{E_2\nu_2}{1-\nu_2^2}}{\frac{E_2}{1-\nu_2^2}} u_{1,1}^{0+}(x_1, 0) + \frac{\frac{E_3}{1-\nu_3^2} - \frac{E_2}{1-\nu_2^2}}{\frac{E_2}{1-\nu_2^2}} u_{2,2}^{0+}(x_1, 0) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right. \quad (5.12)$$

où $\varepsilon = \frac{e_j}{L_0} \approx 0.011$ est le petit paramètre, $E_1 = E_3 = E_a = 210130 \text{ MPa}$ est le module d'Young de l'acier, $E_2 = E_j = 102206 \text{ MPa}$ est le module d'Young du joint, $\nu_1 = \nu_2 = \nu_3 = 0.3$ sont les coefficients de Poisson de l'acier et du joint, respectivement.

Les lecteurs peuvent trouver plus de détails du calcul des DAR pour le cas des contraintes planes dans l'annexe A.

Le calcul basé sur la FEM standard est effectué à l'aide du logiciel FlexPDE[®]. Le maillage du FlexPDE[®] est conforme à la géométrie du joint et raffiné dans la zone autour du joint. Il contient 1008 éléments triangulaires linéaires avec 2091 nœuds (voir Figure 5.38).

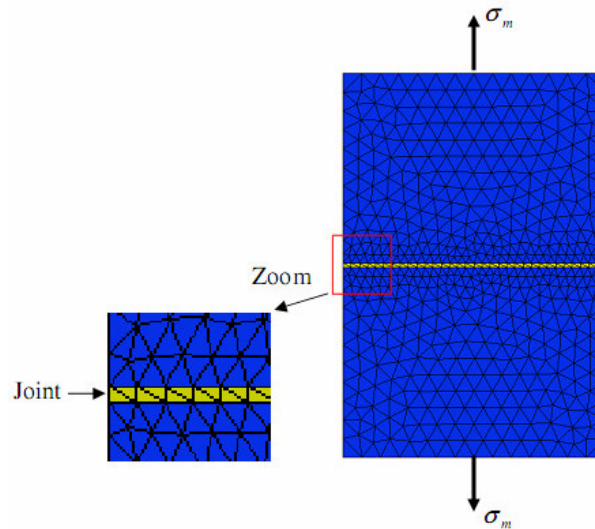


Figure 5.38: Maillage du calcul par FlexPDE[®]

La Figure 5.39 compare la courbe contrainte – déformation en traction issue du calcul numérique avec le résultat expérimental. Les courbes obtenues par le couplage DAR-X-FEM coïncident parfaitement avec celles du FlexPDE®. Cependant, il existe de petits écarts entre les courbes numériques et celle expérimentale. Ces écarts proviennent des erreurs du processus d'identification. Les modules d'Young utilisés pour le calcul numérique, obtenus par l'identification, sont plus grands que les valeurs réelles. Parmi les deux cas de calcul, le cas des contraintes planes a donné la courbe plus proche du résultat expérimental que le cas des déformations planes.

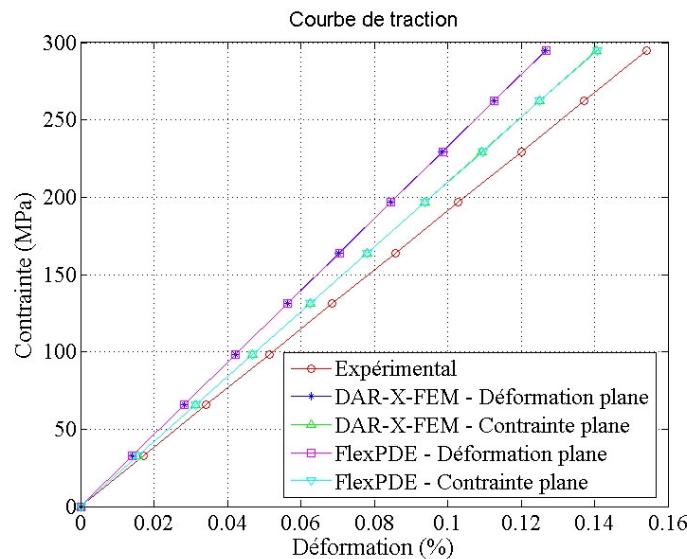


Figure 5.39: Confrontation entre les résultats expérimentaux et des simulations numériques pour l'essai de traction

5.3.2. Essai de cisaillement

5.3.2.1. Identification

L'identification est nourrie par les résultats qui sont issus de l'essai de cisaillement (cf. Section 5.2.1.4).

5.3.2.1.1. Formulation

Comme pour le cas de l'essai de traction, nous avons pour l'essai de cisaillement deux paramètres à identifier: les modules d'Young E_a et E_j de l'acier et du joint brasé après assemblage respectivement. Les données expérimentales utilisées sont certainement les valeurs

de la charge appliquée P (en N) et du déplacement total u_T (en mm) mesuré par l'extensomètre de base $L_0 = 12.5 mm$. Nous considérons la partie utile de l'éprouvette mesurée par l'extensomètre comme l'indique de la Figure 5.40.

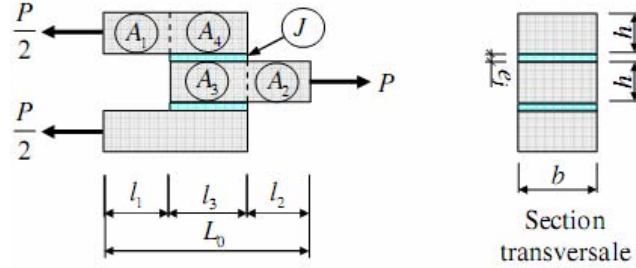


Figure 5.40: Partie de l'éprouvette de cisaillement mesurée par l'extensomètre

Notons u_{A1} , u_{A2} , u_{A3} et u_J les déplacements des parties A_1 , A_2 , A_3 de l'acier et du joint J , respectivement. Ils sont donc donnés par:

$$\begin{cases} u_{A1} = \frac{Pl_1}{2bhE_a} \\ u_{A2} = \frac{Pl_2}{bhE_a} \\ u_{A3} = \frac{Pl_3}{2bhE_a} \\ u_J = \frac{Pe_j}{2bl_3G_j} \end{cases} \quad (5.13)$$

où $l_1 = l_2 = \frac{L_0 - l_3}{2}$, $l_3 = 5 mm$ sont les longueurs initiales des parties d'acier A_1 , A_2 , A_3 ,

$e_j = 0.139 mm$ est l'épaisseur du joint, $b = 8 mm$ et $h = 6 mm$ sont respectivement la largeur et la

hauteur de la section transversale de l'éprouvette, $G_j = \frac{E_j}{2(1+\nu_j)}$ est le module de cisaillement du

joint, $\nu_j = 0.3$ est le coefficient de Poisson du joint.

A partir de la relation $u_T = u_{A1} + u_{A2} + u_{A3} + u_J$, nous pouvons déduire la loi pour identifier les deux modules d'Young E_a et E_j :

$$u_T = \frac{P}{b} \left[\frac{3L_0 - l_3}{4hE_a} + \frac{e_j(1+\nu_j)}{l_3E_j} \right] \Leftrightarrow P = \left[\frac{3L_0 - l_3}{4hE_a} + \frac{e_j(1+\nu_j)}{l_3E_j} \right] u_T \quad (5.14)$$

5.3.2.1.2. Résultats

A l'aide de la loi (5.14), l'identification est appliquée pour chaque éprouvette de l'essai de cisaillement. A titre d'exemple, la Figure 5.41 présente le résultat d'identification de l'éprouvette 1. Les deux courbes: la courbe expérimentale et celle issue de la simulation numérique montrent une bonne concordance.

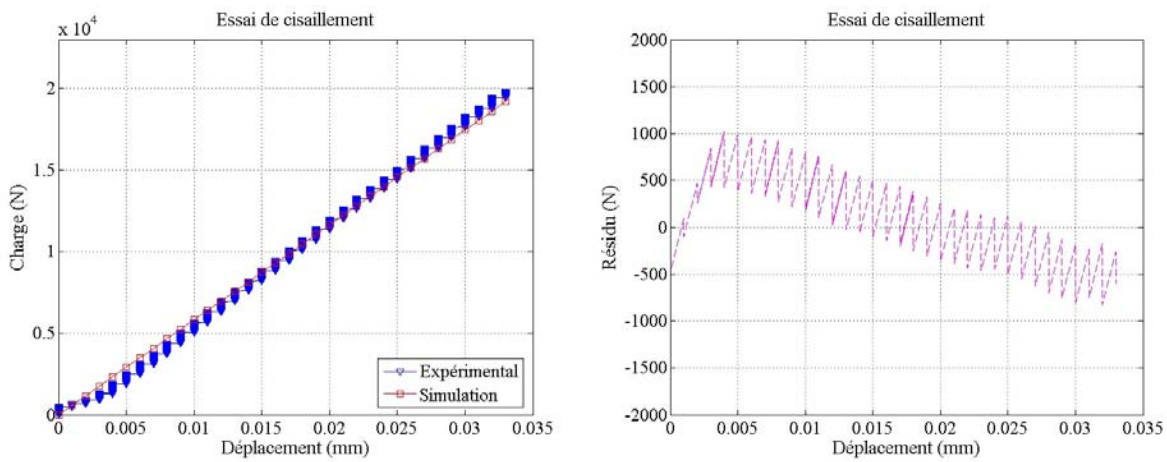


Figure 5.41: Résultat d'identification en cisaillement de l'éprouvette 1

Les modules d'Young identifiés sur la base de l'essai de cisaillement sont résumés dans le Tableau 5.16. Ces valeurs sont plus faibles que celles avant assemblage.

	Après assemblage						Avant assemblage
	Ep. 1	Ep. 2	Ep. 3	Ep. 4	Ep. 5	Valeur moyenne	Valeur de référence
E_a (MPa)	101570	124634	159973	160007	133580	135950	215000
E_j (MPa)	89110	91600	93852	95700	92796	92612	205100

Tableau 5.16: Valeurs identifiées sur la base de l'essai de cisaillement

5.3.2.2. Confrontation

Les résultats expérimentaux exploités de l'essai de cisaillement sont comparés avec ceux de la modélisation par le couplage DAR-X-FEM et par la FEM standard. Nous ne considérons que la partie de recouvrement de l'éprouvette de cisaillement. Les conditions aux limites et la charge appliquées sur cette partie sont présentées sur la Figure 5.42 ci-dessous.

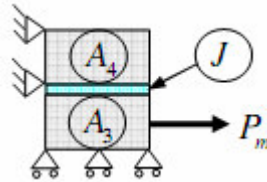


Figure 5.42: Partie de recouvrement de l'éprouvette de cisaillement

Le déplacement u_r de la partie de recouvrement est obtenu à partir du déplacement total u_T en retranchant les valeurs u_{A1} et u_{A2} des parties hors recouvrement:

$$u_r = u_T - (u_{A1} + u_{A2}) \quad (5.15)$$

où u_{A1} et u_{A2} sont calculés par la formule (5.13).

Pour tracer la courbe expérimentale charge – déplacement, nous utilisons les valeurs moyennes de la charge et du déplacement maximaux qui sont calculées sur les résultats de cinq éprouvettes de l'essai: $P_m = 18598 \text{ N}$ et $u_m = 0,0088 \text{ mm}$.

La simulation numérique exploite les modules d'Young $E_a = 135950 \text{ MPa}$ et $E_j = 92612 \text{ MPa}$, qui sont identifiés dans la section 5.3.2.1 (cf. Tableau 5.16). Nous considérons deux cas de calcul: déformation plane et contrainte plane.

La Figure 5.43 présente la comparaison entre la courbe charge – déplacement au cisaillement obtenue par le calcul numérique et celle de la partie expérimentale. La courbe issue du couplage DAR-X-FEM pour le calcul des contraintes planes coïncide parfaitement avec celle expérimentale. Pour le calcul des déformations planes, les résultats sont moins bons. Les résultats du couplage DAR-X-FEM et de la FEM standard (à l'aide de FlexPDE®) montrent une bonne concordance.

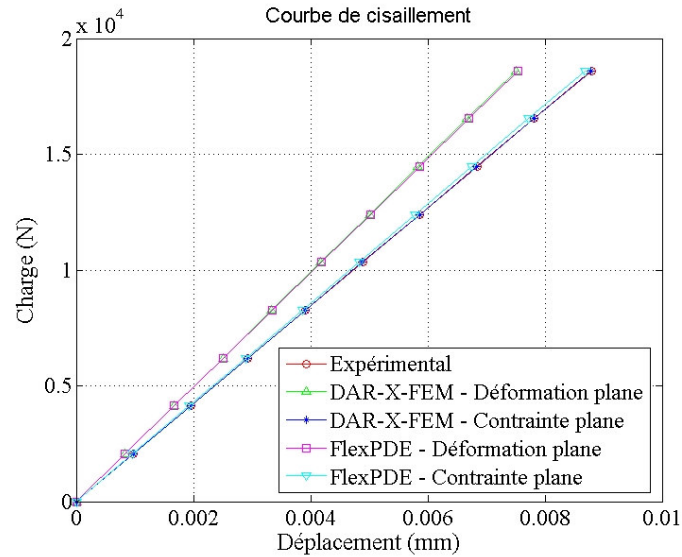


Figure 5.43: Confrontation entre les résultats expérimentaux et des simulations numériques pour l'essai de cisaillement

Les confrontations entre les résultats des simulations numériques et de la partie expérimentale, pour les deux types d'essai: traction et cisaillement, contribue à valider les démarches du calcul par le couplage DAR-XFEM pour le problème des assemblages brasés.

5.4. Conclusion

Ce chapitre nous a apporté une étude expérimentale relativement complète sur le brasage et son produit – l'assemblage brasé.

Le type de brasage a été choisi à haute température sur l'acier X38CrMoV5.1 comme métal de base en combinant avec les deux alliages d'apport à base de nickel: PN38712 (CASTOLIN) et LM (NICROBRAZ). Dans un premier temps, nous avons effectué les essais de brasage avec des éprouvettes simplifiées afin d'identifier la configuration optimale (cycle, pression appliquée, alliage d'apport) parmi les cinq configurations proposées. La comparaison entre les configurations a été effectuée à l'aide des analyses microstructurales et de la mesure des duretés. Les résultats ont montré que la configuration C5 (le cycle de brasage suivi de deux revenus, la pression, engendrée par l'application des poids en acier, restant dans l'intervalle de 0.015 à 0.056 MPa et l'alliage d'apport LM) a donné l'assemblage brasé le plus performant. Les essais de brasage sur les éprouvettes principales ont été ensuite mis en œuvre en appliquant la configuration optimale C5. Une éprouvette brasée a été observée et analysée sous MEB.

L'observation et l'analyse ont montré cinq zones différentes au niveau de la composition chimique dans l'assemblage brasé obtenu.

Dans un deuxième temps, une campagne d'essais mécaniques et thermique a été lancée pour le but de caractériser les propriétés de l'assemblage brasé. Les éprouvettes de ces essais ont été taillées dans les blocs brasés de la partie de brasage. Les essais mécaniques comportent: traction, compression, cisaillement et flexion. La mesure basée sur la méthode de la plaque chaude gardée par le conductivimètre a eu pour but d'identifier la conductivité thermique de l'assemblage brasé. Tous ces essais nous ont permis de comprendre le comportement macroscopique de l'assemblage brasé. En même temps, la caractérisation des propriétés de l'assemblage brasé a validé la qualité de nos essais de brasage.

Ensuite, les résultats des essais de traction et de cisaillement ont été extraits pour servir d'un processus d'identification des modules d'Young de l'acier et du joint après assemblage. Les valeurs obtenues sont introduites dans le calcul numérique par le couplage DAR-XFEM et par le logiciel FlexPDE[®]. La confrontation entre les résultats expérimentaux et numériques a contribué à valider le modèle du couplage DAR-X-FEM.

Bibliographie

AFNOR (1990). *Association française de normalisation*. <http://www.afnor.fr>.

Aubert&Duval. *Notice SMV 3*. www.faroacciai.it/faroacciaiSchede.

Auscal (2008). *MTS 810 & 858 Material Testing Systems*. www.auscal.com.au.

Castolin (2007). *Catalogue général CASTOLIN 2007-2008*. <http://www.castolin.biz/castolin>.

Instron (2009). *5800 Series - Materials Testing Systems for the Most Demanding Applications*. <http://www.instron.tm.fr/wa/library>.

Jang, J. S. C. et Shih, H. P. (2003). Evolution of microstructure of AISI 304 stainless steel joint brazed by mechanical alloyed nickel base filler with different silicon content. *Journal of Materials Science Letters*, **22**, 79-82.

Jiang, W. C., Gong, J. M., Tu, S. D. et Fan, Q. S. (2008). A comparison of brazed residual stress in plate-fin structure made of different stainless steel. *Materials and Design*, **30**, 23-27.

Klarsfeld, S. et De Ponte, F. (2002). Conductivité thermique des isolants. *Techniques de l'ingénieur*, **R2930**.

Levenberg, K. (1944). A Method for the Solution of Certain Problems in Least-Squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, **2**, 164-168.

Marquardt, D. (1963). An Algorithm for Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **11**, 431-441.

MatWeb. *AISI Type H11 Hot Work Tool Steel, air or oil quenched from 995-1025°C*. <http://www.matweb.com>.

More, J. J. (1977). The Levenberg-Marquardt Algorithm: Implementation and Theory. *Numerical Analysis*, ed. G. A. Watson, *Lecture Notes in Mathematics* 630, 105-116.

Nafi, A. (2005). *Etude expérimentale et numérique du comportement mécanique de moules d'injection de plastique obtenus par le procédé de stratoconception*. Université Toulouse III, Albi, France.

Ou, C. L., Liaw, D. W., Du, Y. C. et Shiue, R. K. (2006). Brazing of 422 stainless steel using the AWS classification BNi-2 Braze alloy. *Journal of Materials Science*, **41**, 6353-6361.

Rabinkin, A. (2004). Brazing with (NiCoCr)-B-Si amorphous brazing filler metals: alloys, processing, joint structure, properties, applications. *Science and Technology of Welding and Joining*, **9**, 181-199.

WallColmonoy (2008). Brazing filler metal selector chart. *Nicrobraz technical data sheet*.

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

Chapitre 6 Conclusion et perspectives	237
6.1 . Conclusion.....	237
6.2 . Perspectives	239
6.2.1 . Le cas où le joint est très "mou"	239
6.2.2 . Effet de bord	239
6.2.3 . Comportement local à l'intérieur du joint	240
6.2.4 . Couplage thermomécanique	240
6.2.5 . Géométrie plus complexe	241
6.2.6 . Comportement élastoplastique, fatigue et choc thermique.....	241
6.2.7 . Elargissement des applications du couplage DAR-X-FEM	242
Bibliographie	243

Chapitre 6

Conclusion et perspectives

6.1. Conclusion

Dans ces travaux, la modélisation du comportement des assemblages brasés, à l'aide du couplage de deux méthodes: la méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) et la méthode des éléments finis étendus (X-FEM), a été présentée. La modélisation porte sur les deux aspects mécanique et thermique du comportement des assemblages brasés.

Les inconvénients des méthodes classiques nous ont poussés à rechercher une nouvelle méthode pour traiter les problèmes des assemblages en général et des assemblages brasés en particulier. En tenant compte de la présence du joint qui est considéré comme une singularité dans l'assemblage, nous avons proposé le couplage de deux méthodes DAR et X-FEM.

La méthode des DAR fournit une approche analytique ou semi-analytique pour des problèmes de perturbation singulière dont la présence d'une singularité est caractérisée par un petit paramètre intrinsèque ε . L'approche numérique de la X-FEM permet de relaxer les contraintes imposées au maillage des éléments finis standard pour la modélisation des singularités. A cause de ces différences entre les deux méthodes et de la complexité du problème de modélisation des assemblages brasés, la nécessité de coupler les deux méthodes et de compléter l'une par l'autre a été démontrée.

Les principes fondamentaux ainsi que les méthodes de mise en œuvre du couplage DAR-X-FEM ont été présentées à travers le cas unidimensionnel d'un assemblage brasé. Les deux problèmes: mécanique (traction simple) et thermique (conduction en régime transitoire) ont été considérés. Nous avons proposé deux méthodes différentes pour le couplage: la méthode relative aux fonctions enrichies et la méthode relative aux paramètres d'enrichissement. La méthode relative aux fonctions enrichies, dont le fonctionnement a été présenté au travers de quatre variantes d'enrichissement, consiste à utiliser les solutions extérieures et intérieures des DAR pour construire les fonctions enrichies de la X-FEM. Malgré ses résultats relativement exacts pour le cas unidimensionnel, cette méthode a montré l'impossibilité d'être étendue pour le cas

bidimensionnel. Cet inconvénient peut être résolu par la deuxième méthode: méthode relative aux paramètres d'enrichissement. Pour cette méthode qui a été présentée à travers une cinquième variante d'enrichissement, au lieu de construire les fonctions enrichies, nous avons utilisé la fonction de type Heaviside. En plus, nous exploitons le saut du déplacement au travers de l'interface de singularité obtenu par les DAR pour imposer des conditions aux limites particulières sur les paramètres d'enrichissement de la X-FEM.

Le couplage DAR-X-FEM a été étendu par la suite pour modéliser le cas bidimensionnel de l'assemblage brasé. La méthode relative aux paramètres d'enrichissement a montré son efficacité et sa robustesse pour le cas 2D. La démarche adoptée pour le couplage DAR-X-FEM 2D consiste en deux étapes principales: l'approche des DAR et l'implémentation de la X-FEM. La première étape a été effectuée à l'aide du logiciel des éléments finis standard FlexPDE[®] pour obtenir la valeur du saut des champs primordiaux (la température pour le problème thermique ou le déplacement pour le problème mécanique) au travers de l'interface de singularité. La deuxième étape a été traitée par un programme réalisé sous Matlab. Le couplage DAR-X-FEM 2D a été illustré pour les deux applications: thermique et mécanique.

Afin de mieux comprendre le comportement des assemblages brasés et de valider les résultats de simulation numérique par le couplage DAR-X-FEM, une étude expérimentale a été présentée. Les essais de brasage à haute température de l'acier X38CrMoV5.1 et des alliages d'apport à base de nickel (PN38712 et LM) ont été effectués. Après une campagne d'essais en jouant sur les paramètres du procédé, nous avons choisi la configuration optimale pour le brasage. Les éprouvettes obtenues par brasage ont ensuite fait l'objet d'essais de caractérisation des propriétés mécaniques et thermiques. Les essais mécaniques comprennent: traction, compression, cisaillement et flexion. Une mesure à l'aide d'un conductivimètre a été effectuée pour identifier la conductivité thermique des assemblages brasés. Les résultats des essais de traction et de cisaillement ont été utilisés par la suite pour identifier les modules d'Young de l'acier et du joint brasé après assemblage. Les valeurs obtenues ont été exploitées pour le calcul numérique par le couplage DAR-X-FEM. La comparaison entre les résultats expérimentaux et numériques a validé le modèle du couplage DAR-X-FEM proposé.

Néanmoins, il reste encore quelques limitations pour ces travaux: (1) Le problème des assemblages brasés traité par le couplage DAR-X-FEM est plus simple que celui réel au niveau de la géométrie, du nombre des substrats et des joints et du comportement des matériaux; (2) Le problème à l'intérieur du joint a été négligé; (3) Le couplage thermomécanique n'a pas été abordé.

6.2. Perspectives

Cette étude peut être considérée comme la première étape pour la mise en route du couplage de deux méthodes DAR et X-FEM, appliqué pour la modélisation des assemblages brasés. Beaucoup d'efforts doivent être faits pour accomplir cet objectif, et les points suivants sont des pistes à suivre.

6.2.1. Le cas où le joint est très "mou"

Dans cette étude, nous avons considéré le problème des DAR contenant un seul petit paramètre ε qui est le rapport entre l'épaisseur du joint et celle de l'assemblage. La rigidité du joint a été supposée du même ordre de grandeur avec celles des substrats ($E_2 \sim E_1, E_3$) (cf. Section 3.1.1 du chapitre 3). Pour le cas où le joint est très "mou" par rapport aux substrats ($E_2 \ll E_1, E_3$), le problème est perturbé à la fois par l'existence d'un joint de faible épaisseur, mais aussi par le fait qu'il peut se déformer beaucoup plus. Il convient alors d'introduire un deuxième petit paramètre

$\eta = \frac{E_2}{E_1(E_3)}$ rendant compte de cette forte hétérogénéité des matériaux. Ce problème, appelé

"modèle des ressorts", est abordé par (Geymonat *et al.*, 1996) et (Leguillon *et al.*, 1999). Dans ce cas là, la perturbation, due à la présence du joint, ne sera pas "récupérée" par l'unique terme u^1 , mais le sera dès le premier terme u^0 . u^0 ne correspond donc plus à la solution du problème non perturbé (sans présence de joint). Par conséquent, le saut du déplacement imposé lors de la mise en œuvre X-FEM dépendra du saut du premier terme extérieur u^0 des DAR.

6.2.2. Effet de bord

Nous avons considéré la mise en application des DAR au milieu du joint, *i.e.* loin de ses extrémités, ou de parois dans le cas d'assemblages/outillages complexes (le problème intérieur type 1 – cf. Figure 6.1). Ce type du problème intérieur a pu être résolu en se basant sur les conditions aux limites fournies par le problème extérieur. Par contre, pour les points aux extrémités du joint où la perturbation devient "singulière" (apparition de concentration de contraintes par exemple), un nouveau problème intérieur des DAR doit être défini — le problème intérieur type 2 (Figure 6.1). Ce type du problème intérieur pourra être résolu en utilisant d'une part, les conditions aux limites issues du problème extérieur et du problème intérieur type 1 simultanément, et d'autre part des conditions aux limites en paroi. Cependant, dans l'exemple du

cas de traction-cisaillement (voir Section 4.3.2.2 du chapitre 4), un effet de bord a déjà été détecté, mais il n'a pas été traité rigoureusement. En effet, comme montré dans cet exemple, la présence du joint et sa prise en compte ont généré une concentration des contraintes près du bord.

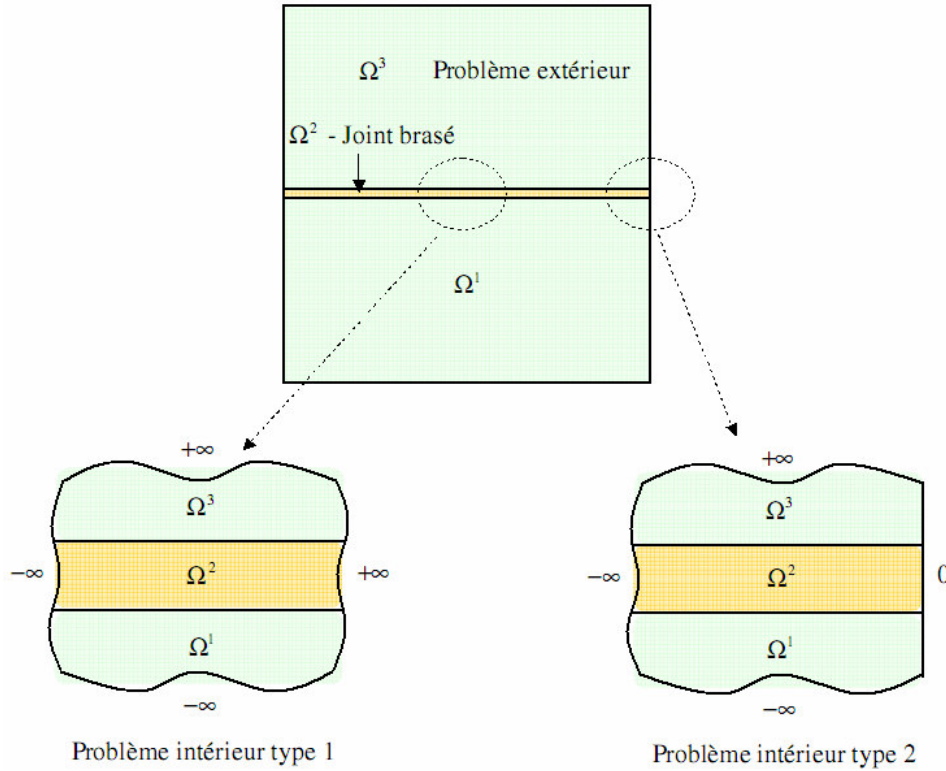


Figure 6.1: Deux types de problème intérieur des DAR

6.2.3. Comportement local à l'intérieur du joint

Dans ces travaux, le couplage DAR-X-FEM ne porte que sur la modélisation du comportement global de l'assemblage brasé en tenant compte de la présence du joint. Le joint a été "écrasé" en une interface de discontinuité. Par contre, le comportement local à l'intérieur du joint n'a pas encore été abordé par le couplage DAR-X-FEM. Le problème intérieur des DAR n'a servi qu'à la détermination du saut des termes extérieurs. Cela alors mérite une étude supplémentaire qui ne portera que sur les problèmes intérieurs. Une stratégie de la X-FEM multi-échelle, proposée par (Rannou *et al.*, 2007), pourra être inspirée.

6.2.4. Couplage thermomécanique

Nous avons traité les deux problèmes mécanique et thermique séparément par le couplage DAR-X-FEM. Ces résultats peuvent être considérés comme des premières contributions à l'étude du

comportement thermomécanique des assemblages brasés. Malgré cela, un problème couplé thermomécanique complet devra être pris en compte. Dans ce cas là, la température issue du problème thermique sera introduite dans la loi du comportement du problème mécanique.

6.2.5. Géométrie plus complexe

Le couplage DAR-X-FEM a bien fonctionné pour le cas bidimensionnel d'un assemblage typique de deux substrats joints par brasage. Ces résultats prometteurs nous encouragent à développer une étude pour les cas plus complexes au niveau de la géométrie du modèle, comme l'illustre la Figure 6.2. L'intérêt de la modélisation présentée ici réside en partie dans la simulation numérique du comportement de structures complexes comme des outillages strato-conçus (cf. Figure 1.2 du chapitre 1).

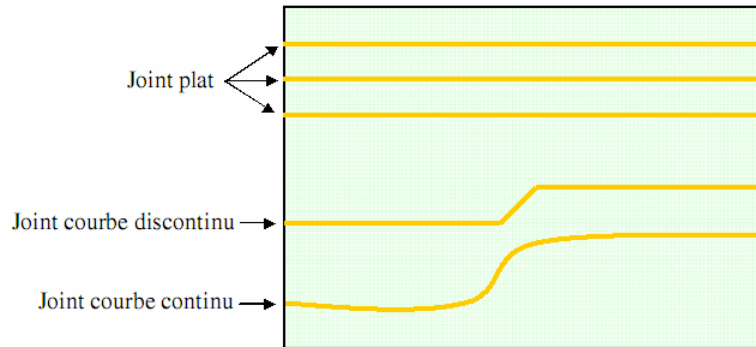


Figure 6.2: Empilement des substrats brasés avec formes différentes du joint

6.2.6. Comportement élastoplastique, fatigue et choc thermique

Dans notre étude, l'objectif portait exclusivement sur la méthodologie employée via le couplage X-FEM – DAR. Ainsi, le comportement des matériaux a été supposé en première approche élastique linéaire. Cependant, on ne peut pas écarter la plastification possible des matériaux pour certains cas de chargement. Par exemple dans nos essais, malgré le comportement linéaire observé pour l'assemblage brasé, il est tout à fait possible que le joint se déforme plastiquement. Il faudra alors tenir compte du comportement élastoplastique de l'assemblage. De plus, si on vise l'application du modèle aux moules de fonderie, la fatigue, générée par les chargements cycliques mécaniques et les chocs thermiques répétés, devra être prise en compte. On sait le succès de la X-FEM pour traiter ces sujets. Nous avons beaucoup d'espoir de pouvoir les aborder dans cette confrontation avec fatigue dans le joint.

6.2.7. Elargissement des applications du couplage DAR-X-FEM

A partir de l'application dans ces travaux pour les assemblages brasés, nous pouvons imaginer étendre le couplage DAR-X-FEM pour d'autres applications "similaires". A titre d'exemple, le couplage DAR-X-FEM pourra être utilisé pour traiter le problème de propagation de fissure dans le joint brasé (Figure 6.3). Dans ce cas là, la partie "saine" du joint sera enrichie par le couplage DAR-X-FEM proposé par notre étude. Par contre, la partie fissurée du joint pourra être enrichie par la méthode X-FEM originelle (Moës *et al.*, 1999). Le problème sera posé: comment peut-on coupler les deux stratégies d'enrichissement?

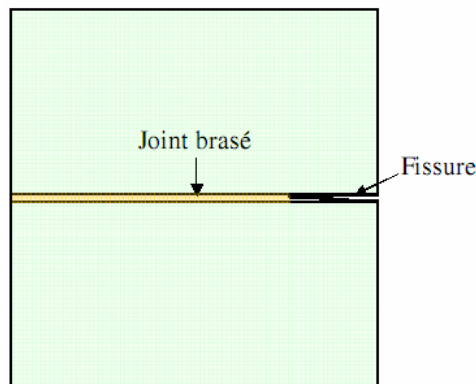


Figure 6.3: Joint brasé contenant une fissure

Parmi les autres cas d'application qui pourront être abordés: le délaminage de la couche de revêtement de son substrat (cf. Figure 6.4) ou la dégradation de ce revêtement observée lors d'opérations d'usinage (Abdel-Aal *et al.*, 2008). Ces études pourraient s'appuyer par exemple sur l'approche X-FEM des procédés d'usinage abordée par (Guétari *et al.*, 2005).

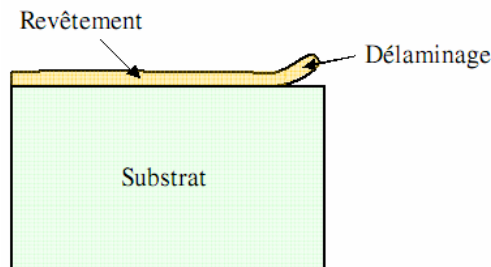


Figure 6.4: Délaminage de la couche de revêtement

Bibliographie

Abdel-Aal, H. A., Nouari, M. et El Mansori, M. (2008). The effect of thermal property degradation on wear of WC-CO inserts in dry cutting. *Wear*, **265**, 1670-1679.

Geymonat, G., Krasucki, F. et Lenci, S. (1996). Analyse asymptotique du comportement d'un assemblage collé. *Comptes rendus de l'Académie des sciences. Série 1: Mathématique*, **322**, 1107-1112.

Guétari, Y., Le Corre, S. et Moës, N. (2005). Étude des possibilités de la méthode X-FEM pour la simulation numérique de la coupe. *Mécanique & Industries*, **6**, 315-319.

Leguillon, D. et Abdelmoula, R. (1999). Mode III near and far fields for a crack lying in or along a joint. *International Journal of Solids and Structures*, **37**, 2651-2672.

Moës, N., Dolbow, J. et Belytschko, T. (1999). A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **46**, 131–150.

Rannou, J., Gravouil, A. et Combescure, A. (2007). A multi-grid extended finite element method for elastic crack growth simulation. *European Journal of Computational Mechanics*, **16**, 161-182.

Annexe A

Détails de calcul de la méthode des DAR

Annexe A	Détails de calcul de la méthode des DAR	249
A.1.	Problème thermique	250
A.2.	Problème mécanique	254

Annexe A

Détails de calcul de la méthode des DAR

Dans cette annexe, nous développons en détail les calculs des DAR pour le modèle bidimensionnel de l'assemblage brasé dont les caractéristiques sont présentées dans la section 4.1.1 du chapitre 4. Les deux domaines extérieur et intérieur obtenus à partir du modèle adimensionnel complet sont présentés sur la Figure A.1 ci-dessous.

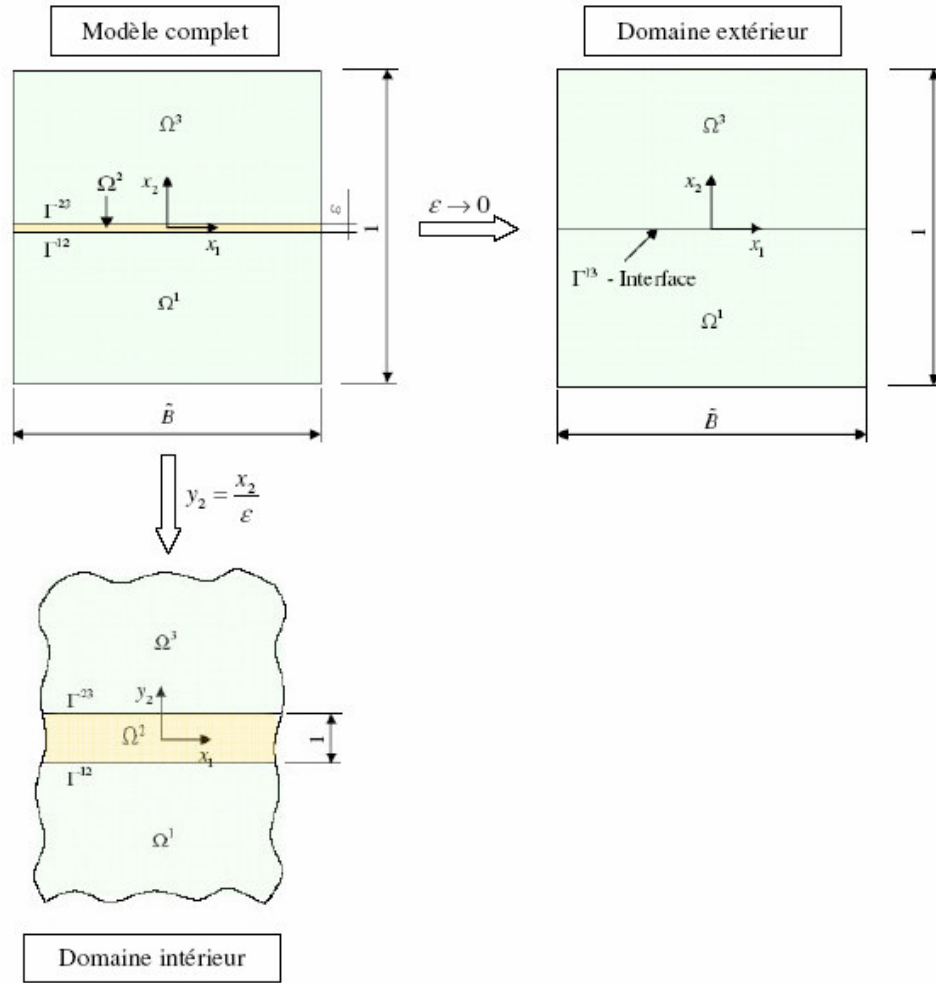


Figure A.1: Modèle complet et les domaines considérés par les DAR

La première partie de cette annexe porte sur le problème thermique. Le problème mécanique est présenté dans la deuxième partie.

A.1. Problème thermique

A.2.1. Equations du problème

En régime permanent sans source interne et conductivité constante, l'équation de la chaleur en 2D est donnée par:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = 0 \quad (\text{A.1})$$

La relation entre la température et la densité du flux de chaleur est exprimée au travers de la loi de Fourier:

$$\varphi_k = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_k} \quad (k = 1, 2) \quad (\text{A.2})$$

A.2.2. Développements extérieur et intérieur

Le développement extérieur de la température T , qui est valable pour le domaine extérieur, s'écrit sous la forme:

$$T(x_1, x_2) = T^0(x_1, x_2) + \varepsilon T^1(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{A.3})$$

En supposant que chaque terme de (A.3) soit continu par morceaux, *i.e.* continu au-dessus et au-dessous de l'interface Γ^{13} , ils peuvent être écrits sous la forme d'un développement limité de Taylor par rapport à x_2 :

$$T_{\pm}^j(x_1, x_2) = T_{\pm}^j(x_1, 0) + x_2 \frac{\partial T_{\pm}^j}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 T_{\pm}^j}{\partial x_2^2}(x_1, 0) + \dots \quad (\text{A.4})$$

où '-' pour Ω^1 ($x_2 < 0$) et '+' pour Ω^3 ($x_2 > 0$), $j = 0, 1, 2, \dots$

En remplaçant (A.4) dans (A.3) et regroupant les termes de même puissance de ε , nous obtenons:

$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) = & T_{\pm}^0(x_1, 0) + x_2 \frac{\partial T_{\pm}^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 T_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) + \\ & + \varepsilon \left[T_{\pm}^1(x_1, 0) + x_2 \frac{\partial T_{\pm}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{x_2^2}{2} \frac{\partial^2 T_{\pm}^1}{\partial x_2^2}(x_1, 0) \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Etant valable pour le domaine intérieur, le développement intérieur s'écrit:

$$T(x_1, \varepsilon y_2) = \tau^0(x_1, y_2) + \varepsilon \tau^1(x_1, y_2) + \dots \quad (\text{A.6})$$

A.2.3. Règle de raccordement

La forme générale de la règle de raccordement des DAR consiste en:

$$\lim_{x_2 \rightarrow 0} (\text{Développement extérieur}) = \lim_{y_2 \rightarrow \pm\infty} (\text{Développement intérieur}) \quad (\text{A.7})$$

Nous réécrivons l'équation (A.5) en variable $y_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$:

$$\begin{aligned} T(x_1, 0) = & T^0(x_1, 0) + \varepsilon \left[y_2 \frac{\partial T_{\pm}^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + T_{\pm}^1(x_1, 0) \right] + \\ & + \varepsilon^2 \left[\frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 T_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) + y_2 \frac{\partial T_{\pm}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) + T_{\pm}^2(x_1, 0) \right] + \dots \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Notons que le terme non-perturbé T^0 est continu au travers de l'interface Γ^{13} , nous avons donc:

$$T_+^0(x_1, 0) = T_-^0(x_1, 0).$$

En appliquant la règle de raccordement (A.7) pour chaque terme des développements extérieur (A.8) et intérieur (A.6), nous obtenons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{y_2 \rightarrow \pm\infty} (\tau^0(x_1, y_2) - T^0(x_1, 0)) = 0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \pm\infty} \left(\tau_{\pm}^1(x_1, y_2) - y_2 \frac{\partial T_{\pm}^0}{\partial x_2}(x_1, 0) - T_{\pm}^1(x_1, 0) \right) = 0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \pm\infty} \left(\tau_{\pm}^2(x_1, y_2) - \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 T_{\pm}^0}{\partial x_2^2}(x_1, 0) - y_2 \frac{\partial T_{\pm}^1}{\partial x_2}(x_1, 0) - T_{\pm}^2(x_1, 0) \right) = 0 \\ \vdots \end{array} \right. \quad (A.9)$$

A.2.4. Détermination des termes des développements

A.1.4.1. Termes T^0 et τ^0

En remplaçant le développement extérieur (A.3) dans l'équation de la chaleur (A.1) et les conditions aux limites que nous ne reprécisons pas ici, le problème du terme non-perturbé T^0 est bien posé:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial^2 T_{\pm}^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T_{\pm}^0}{\partial x_2^2} = 0 & \text{dans } \Omega^1(-) \text{ et } \Omega^3(+) \\ T_+^0(x_1, 0) = T_-^0(x_1, 0) & \text{à l'interface } \Gamma^{13} \\ \text{Conditions aux limites pour } T_{\pm}^0 & \text{dans } \Omega^1(-) \text{ et } \Omega^3(+) \end{array} \right. \quad (A.10)$$

La résolution de (A.10) nous donne directement le premier terme extérieur T^0 .

En introduisant le développement intérieur (A.6) dans l'équation (A.1) et en tenant compte de

$$\frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_2^2} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_1^2} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial y_2^2}, \text{ nous obtenons:}$$

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \tau^0}{\partial y_2^2} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial^2 \tau^1}{\partial y_2^2} + \left(\frac{\partial^2 \tau^0}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \tau^2}{\partial y_2^2} \right) + \dots = 0 \quad (A.11)$$

L'ordre ε^{-2} de l'équation (A.11) et la première équation de la règle de raccordement (A.9) nous fournissent le problème du premier terme intérieur τ^0 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{\pm}^0}{\partial y_2^2} = 0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \pm\infty} (\tau_{\pm}^0(x_1, y_2) - T^0(x_1, 0)) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.12})$$

ce qui donne:

$$\tau^0(x_1, y_2) = T^0(x_1, 0) \quad (\text{A.13})$$

A.1.4.2. Termes T^1 et τ^1

L'ordre ε^{-1} de l'équation (A.11) et la deuxième équation de la règle de raccordement (A.9) nous donnent le problème du deuxième terme intérieur τ^1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{\pm}^1}{\partial y_2^2} = 0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \pm\infty} \left(\tau_{\pm}^1(x_1, y_2) - y_2 \frac{\partial T_{\pm}^0}{\partial x_2}(x_1, 0) - T_{\pm}^1(x_1, 0) \right) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

ce qui donne directement:

$$\tau_{\pm}^1(x_1, y_2) = y_2 \frac{\partial T_{\pm}^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + T_{\pm}^1(x_1, 0) \text{ dans } \Omega^3(+) \text{ et } \Omega^1(-) \text{ resp.} \quad (\text{A.15})$$

Pour le domaine Ω^2 , notons $\tau_{\Omega_+^2}^1(x_1, y_2)$ et $\tau_{\Omega_-^2}^1(x_1, y_2)$ les deuxièmes termes intérieurs qui sont valables dans les sous-domaines Ω_+^2 ($0 < y_2 \leq 1/2$) et Ω_-^2 ($-1/2 \leq y_2 < 0$), respectivement.

Dans Ω_+^2 ($0 < y_2 \leq 1/2$), nous avons:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \tau_{\Omega_+^2}^1}{\partial y_2^2} = 0 \\ \lambda_2 \frac{\partial \tau_{\Omega_+^2}^1}{\partial y_2} = \lambda_3 \frac{\partial \tau_+^1}{\partial y_2} \quad \text{à } y_2 = \frac{1}{2} \\ \tau_{\Omega_+^2}^1 = \tau_+^1 \quad \text{à } y_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

ce qui donne:

$$\tau_{\Omega_+^2}^1(x_1, y_2) = y_2 \frac{\partial T_+^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_+^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + T_+^1(x_1, 0) \quad (\text{A.17})$$

Identiquement, dans Ω_-^2 ($-1/2 \leq y_2 < 0$), nous avons:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tau_{\Omega^2}^1}{\partial y_2^2} = 0 \\ \lambda_2 \frac{\partial \tau_{\Omega^2}^1}{\partial y_2} = \lambda_1 \frac{\partial \tau_-^1}{\partial y_2} \quad \text{à } y_2 = -\frac{1}{2} \\ \tau_{\Omega^2}^1 = \tau_-^1 \quad \text{à } y_2 = -\frac{1}{2} \end{array} \right. \quad (\text{A.18})$$

ce qui donne:

$$\tau_{\Omega^2}^1(x_1, y_2) = y_2 \frac{\partial T_-^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_-^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + T_-^1(x_1, 0) \quad (\text{A.19})$$

A l'interface entre les deux sous-domaines Ω_+^2 et Ω_-^2 , ce qui correspond à $y_2 = 0$, la condition de continuité doit être vérifiée par les deux termes $\tau_{\Omega_+^2}^1(x_1, y_2)$ et $\tau_{\Omega_-^2}^1(x_1, y_2)$:

$$\tau_{\Omega_+^2}^1(x_1, 0) = \tau_{\Omega_-^2}^1(x_1, 0) \Leftrightarrow \frac{\lambda_2 - \lambda_3}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_+^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + T_+^1(x_1, 0) = \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_-^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + T_-^1(x_1, 0) \quad (\text{A.20})$$

ce qui donne la condition de discontinuité des deuxièmes termes extérieurs à l'interface Γ^{13} :

$$\llbracket T^1 \rrbracket = T_+^1(x_1, 0) - T_-^1(x_1, 0) = \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_+^0}{\partial x_2}(x_1, 0) + \frac{\lambda_1 - \lambda_2}{2\lambda_2} \cdot \frac{\partial T_-^0}{\partial x_2}(x_1, 0) \quad (\text{A.21})$$

A.2. Problème mécanique

A.2.1. Equations du problème

- Equation d'équilibre:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{A.22})$$

- Loi de comportement:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (\text{A.23})$$

- Relation de compatibilité:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (i, j = 1, 2) \quad (\text{A.24})$$

A.2.2. Développements extérieur et intérieur

Pour le domaine extérieur, nous supposons les développements extérieurs du déplacement et de la contrainte sous les formes:

$$\underline{u}(x_1, x_2) = \underline{u}^0(x_1, x_2) + \varepsilon \underline{u}^1(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{A.25})$$

$$\underline{\sigma}(x_1, x_2) = \underline{\sigma}^0(x_1, x_2) + \varepsilon \underline{\sigma}^1(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{A.26})$$

Pour le domaine intérieur, en appliquant le changement de la variable $y_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$, le développement

intérieur est écrit pour le déplacement et la contrainte:

$$\underline{v}(x_1, \varepsilon y_2) = \underline{v}^0(x_1, y_2) + \varepsilon \underline{v}^1(x_1, y_2) + \dots \quad (\text{A.27})$$

$$\underline{\Sigma}(x_1, x_2) = \varepsilon^{-1} \underline{\Sigma}^{-1}(x_1, x_2) + \underline{\Sigma}^0(x_1, x_2) + \varepsilon \underline{\Sigma}^1(x_1, x_2) + \dots \quad (\text{A.28})$$

A.2.3. Règle de raccordement

La règle de raccordement appliquée pour les termes extérieurs et intérieurs du déplacement consiste en:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{y_2 \rightarrow \pm\infty} \left(\underline{v}^0(x_1, y_2) - \underline{u}^0(x_1, 0) \right) = 0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \pm\infty} \left(\underline{v}^{1\pm}(x_1, y_2) - y_2 \frac{\partial \underline{u}^{0\pm}}{\partial x_2}(x_1, 0) - \underline{u}^{1\pm}(x_1, 0) \right) = 0 \\ \lim_{y_2 \rightarrow \pm\infty} \left(\underline{v}^{2\pm}(x_1, y_2) - \frac{y_2^2}{2} \frac{\partial^2 \underline{u}^{0\pm}}{\partial x_2^2}(x_1, 0) - y_2 \frac{\partial \underline{u}^{1\pm}}{\partial x_2}(x_1, 0) - \underline{u}^{2\pm}(x_1, 0) \right) = 0 \\ \vdots \end{array} \right. \quad (\text{A.29})$$

A.2.4. Détermination des termes des développements

A.2.4.1. Termes \underline{u}^0 et \underline{v}^0

En remplaçant le développement extérieur du déplacement (A.25) et de la contrainte (A.26) dans les équations (A.22), (A.23) et (A.24) du problème et en identifiant des termes de même ordre

que ε^0 , nous obtenons le problème des termes non-perturbés $\underline{u}^{0\pm} = \left\{ \begin{array}{l} u_1^{0\pm} \\ u_2^{0\pm} \end{array} \right\}$:

$$\left[\begin{array}{l} \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11,1}^{0\pm} + \sigma_{12,2}^{0\pm} = 0 \\ \sigma_{21,1}^{0\pm} + \sigma_{22,2}^{0\pm} = 0 \end{array} \right. \\ \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11}^{0\pm} \\ \sigma_{22}^{0\pm} \\ \sigma_{12}^{0\pm} \end{array} \right\} = [D] \left\{ \begin{array}{l} u_{1,1}^{0\pm} \\ u_{2,2}^{0\pm} \\ u_{1,2}^{0\pm} + u_{2,1}^{0\pm} \end{array} \right\} \\ \underline{u}^{0+}(x_1, 0) = \underline{u}^{0-}(x_1, 0) \quad \text{à l'interface } \Gamma^{13} \\ \text{Conditions aux limites pour } \underline{u}^{0\pm} \end{array} \right. \quad (\text{A.30})$$

où $(\cdot)_{,i} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x_i}$, $(\cdot)_{,ij} = \frac{\partial^2(\cdot)}{\partial x_i \partial x_j}$ ($i, j = 1, 2$), $[D]$ est la matrice d'élasticité qui est définie pour les deux cas suivants:

- Déformation plane:

$$[D] = \begin{bmatrix} \lambda_n^L + 2\mu_n & \lambda_n^L & 0 \\ \lambda_n^L & \lambda_n^L + 2\mu_n & 0 \\ 0 & 0 & \mu_n \end{bmatrix} \quad (\text{A.31})$$

- Contrainte plane:

$$[D] = \frac{E_n}{1 - v_n^2} \begin{bmatrix} 1 & v_n & 0 \\ v_n & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1 - v_n}{2} \end{bmatrix} \quad (\text{A.32})$$

où $n = 1, 2$ et 3 correspondent aux sous-domaines Ω^1, Ω^2 et Ω^3

La résolution du système (A.30) nous donne directement le premier terme extérieur \underline{u}^0 .

Ensuite, en introduisant le développement intérieur (A.27) et (A.28) dans la loi de comportement (A.23), on obtient:

$$\begin{aligned}
 \underline{\Sigma}^{-1} &= \begin{Bmatrix} \Sigma_{11}^{-1} \\ \Sigma_{22}^{-1} \\ \Sigma_{12}^{-1} \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} 0 \\ v_{2,2}^0 \\ v_{1,2}^0 \end{Bmatrix} \\
 \underline{\Sigma}^0 &= \begin{Bmatrix} \Sigma_{11}^0 \\ \Sigma_{22}^0 \\ \Sigma_{12}^0 \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} v_{1,1}^0 \\ v_{2,2}^1 \\ v_{1,2}^1 + v_{2,1}^0 \end{Bmatrix} \\
 \underline{\Sigma}^1 &= \begin{Bmatrix} \Sigma_{11}^1 \\ \Sigma_{22}^1 \\ \Sigma_{12}^1 \end{Bmatrix} = [D] \begin{Bmatrix} v_{1,1}^1 \\ v_{2,2}^2 \\ v_{1,2}^2 + v_{2,1}^1 \end{Bmatrix} \\
 &\vdots
 \end{aligned} \tag{A.33}$$

Remplaçons le développement intérieur de la contrainte (A.28) dans l'équation d'équilibre (A.22) pour obtenir les systèmes d'équations à chaque ordre de ε comme suit:

$$\varepsilon^{-2} : \begin{cases} \Sigma_{12,2}^{-1} = 0 \\ \Sigma_{22,2}^{-1} = 0 \end{cases} \tag{A.34}$$

$$\varepsilon^{-1} : \begin{cases} \Sigma_{11,1}^{-1} + \Sigma_{12,2}^0 = 0 \\ \Sigma_{21,1}^{-1} + \Sigma_{22,2}^0 = 0 \end{cases} \tag{A.35}$$

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} \Sigma_{11,1}^0 + \Sigma_{12,2}^1 = 0 \\ \Sigma_{21,1}^0 + \Sigma_{22,2}^1 = 0 \end{cases} \tag{A.36}$$

...

En remplaçant (A.33) dans l'équation (A.34), nous obtenons:

$$\begin{cases} v_{1,22}^0 = 0 \\ v_{2,22}^0 = 0 \end{cases} \tag{A.37}$$

Dans les formules des termes intérieurs, notons:

$$(\bullet)_{,1} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial x_1}; (\bullet)_{,2} = \frac{\partial(\bullet)}{\partial y_2}; (\bullet)_{,11} = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x_1^2}; (\bullet)_{,12} = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial x_1 \partial y_2}; (\bullet)_{,22} = \frac{\partial^2(\bullet)}{\partial y_2^2}$$

En combinant (A.37) et la règle de raccordement (A.29), le premier terme intérieur est déduit:

$$\underline{v}^0(x_1, y_2) = \underline{u}^0(x_1, 0) \tag{A.38}$$

où $\underline{v}^0 = \{v_1^0 \ v_2^0\}^T$.

A.2.4.2. Termes \underline{u}^1 et \underline{v}^1

Pour les problèmes des deuxièmes termes extérieur et intérieur, nous distinguons les deux cas: déformation plane et contrainte plane.

A.2.4.2.1. Déformation plane

Dans Ω^1 et Ω^3 , pour obtenir l'équation d'équilibre du deuxième terme intérieur, nous introduisons (A.33) dans (A.35):

$$\begin{cases} \lambda_p^L v_{2,12}^0 + \mu_p (v_{1,22}^{1\mp} + v_{2,12}^0) = 0 \\ \mu_p v_{1,12}^0 + \lambda_p^L v_{1,12}^0 + (\lambda_p^L + 2\mu_p) v_{2,22}^{1\mp} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

ce qui donne:

$$\begin{cases} v_{1,22}^{1\mp} = -\frac{\lambda_p^L + \mu_p}{\mu_p} v_{2,12}^0 \\ v_{2,22}^{1\mp} = -\frac{\lambda_p^L + \mu_p}{\lambda_p^L + 2\mu_p} v_{1,12}^0 \end{cases} \quad (\text{A.40})$$

où $p=1,3$; '-' pour Ω^1 et '+' pour Ω^3 .

L'équation (A.38) montre que le premier terme intérieur \underline{v}^0 ne dépend pas de y_2 , ce qui revient alors:

$$v_{1,12}^0 = v_{2,12}^0 = 0 \quad (\text{A.41})$$

Par conséquent, l'équation d'équilibre pour le deuxième terme intérieur est sous la forme:

$$\begin{cases} v_{1,22}^{1\mp} = 0 \\ v_{2,22}^{1\mp} = 0 \end{cases} \quad (\text{A.42})$$

La combinaison de (A.42) et la règle de raccordement donne la formule de \underline{v}^1 dans Ω^1 et Ω^3 :

$$\underline{v}^{1\mp}(x_1, y_2) = y_2 \frac{\partial \underline{u}^{0\mp}}{\partial x_2}(x_1, 0) + \underline{u}^{1\mp}(x_1, 0) \quad (\text{A.43})$$

Le domaine du joint Ω^2 est divisé en deux parties: Ω^{2+} ($0 \leq y_2 \leq 1/2$) et Ω^{2-} ($-1/2 \leq y_2 \leq 0$).

Désignons $\underline{v}^{1(2+)}$ et $\underline{v}^{1(2-)}$ les deuxième termes intérieurs pour ces deux parties. Etant identiques aux termes $\underline{v}^{1\pm}$, les deux termes $\underline{v}^{1(2\pm)}$ sont affines par rapport à y_2 . Pour déterminer ces termes, nous utilisons les conditions de continuité du déplacement et de la contrainte aux interfaces Γ^{23} ($y_2 = 1/2$) et Γ^{12} ($y_2 = -1/2$).

A $y_2 = 1/2$, les conditions de continuité sont données par:

$$\begin{cases} \left[\left[\underline{\Sigma}^0 \right] \right] e_2 = 0 \\ \left[\left[\underline{v}^1 \right] \right] = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Sigma_{12}^{0(2+)} = \Sigma_{12}^{0+} \\ \Sigma_{22}^{0(2+)} = \Sigma_{22}^{0+} \\ v_1^{1(2+)} = v_1^{1+} \\ v_2^{1(2+)} = v_2^{1+} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_2 (v_{1,2}^{1(2+)} + v_{2,1}^0) = \mu_3 (v_{1,2}^{1+} + v_{2,1}^0) \\ \lambda_2^L v_{1,1}^0 + (\lambda_2^L + 2\mu_2) v_{2,2}^{1(2+)} = \lambda_3^L v_{1,1}^0 + (\lambda_3^L + 2\mu_3) v_{2,2}^{1+} \\ v_1^{1(2+)} = v_1^{1+} \\ v_2^{1(2+)} = v_2^{1+} \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

La résolution du système (A.44) fournit les composantes du terme $\underline{v}^{1(2+)}$:

$$\begin{cases} v_1^{1(2+)} = \left[\frac{\mu_3}{\mu_2} u_{1,2}^{0+}(x_1, 0) + \frac{\mu_3 - \mu_2}{\mu_2} u_{2,1}^{0+}(x_1, 0) \right] y_2 + \\ \quad + \frac{\mu_2 - \mu_3}{2\mu_2} [u_{1,2}^{0+}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0+}(x_1, 0)] + u_1^{1+}(x_1, 0) \\ v_2^{1(2+)} = \left[\frac{\lambda_3^L - \lambda_2^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0+}(x_1, 0) + \frac{\lambda_3^L + 2\mu_3}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{2,2}^{0+}(x_1, 0) \right] y_2 + \\ \quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_2^L - \lambda_3^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0+}(x_1, 0) + \frac{\lambda_2^L + 2\mu_2 - \lambda_3^L - 2\mu_3}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{2,2}^{0+}(x_1, 0) \right] + u_2^{1+}(x_1, 0) \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

Identiquement, en utilisant les conditions de continuité à $y_2 = -1/2$, nous obtenons l'expression des composantes du terme $\underline{v}^{1(2-)}$:

$$\begin{cases} v_1^{1(2-)} = \left[\frac{\mu_1}{\mu_2} u_{1,2}^{0-}(x_1, 0) + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2} u_{2,1}^{0-}(x_1, 0) \right] y_2 + \\ \quad + \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} [u_{1,2}^{0-}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0-}(x_1, 0)] + u_1^{1-}(x_1, 0) \\ v_2^{1(2-)} = \left[\frac{\lambda_1^L - \lambda_2^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0-}(x_1, 0) + \frac{\lambda_1^L + 2\mu_1}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{2,2}^{0-}(x_1, 0) \right] y_2 + \\ \quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_1^L - \lambda_2^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0-}(x_1, 0) + \frac{\lambda_1^L + 2\mu_1 - \lambda_2^L - 2\mu_2}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{2,2}^{0-}(x_1, 0) \right] + u_2^{1-}(x_1, 0) \end{cases} \quad (\text{A.46})$$

A $y_2 = 0$, la condition de continuité du déplacement doit être satisfaite, nous avons alors:

$$\begin{cases} v_1^{1(2-)} = v_1^{1(2+)} \\ v_2^{1(2-)} = v_2^{1(2+)} \end{cases} \quad (\text{A.47})$$

En remplaçant (A.45) et (A.46) dans (A.47), nous obtenons les conditions de discontinuité suivantes:

$$\left\{ \begin{aligned} \llbracket u_1^1 \rrbracket &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} [u_{1,2}^{0-}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0-}(x_1, 0)] + \frac{\mu_3 - \mu_2}{2\mu_2} [u_{1,2}^{0+}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0+}(x_1, 0)] \\ \llbracket u_2^1 \rrbracket &= \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_1^L - \lambda_2^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0-}(x_1, 0) + \left(\frac{\lambda_1^L + 2\mu_1}{\lambda_2^L + 2\mu_2} - 1 \right) u_{2,2}^{0-}(x_1, 0) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\lambda_3^L - \lambda_2^L}{\lambda_2^L + 2\mu_2} u_{1,1}^{0+}(x_1, 0) + \left(\frac{\lambda_3^L + 2\mu_3}{\lambda_2^L + 2\mu_2} - 1 \right) u_{2,2}^{0+}(x_1, 0) \right] \end{aligned} \right. \quad (\text{A.48})$$

où $\llbracket u_1^1 \rrbracket = u_1^{1+}(x_1, 0) - u_1^{1-}(x_1, 0)$ et $\llbracket u_2^1 \rrbracket = u_2^{1+}(x_1, 0) - u_2^{1-}(x_1, 0)$ sont les sauts des composantes des deuxième termes extérieurs \underline{u}^{1+} et \underline{u}^{1-} à travers l'interface Γ^{13} .

A.2.4.2.2. Contrainte plane

Les étapes de calcul sont identiques à celles du cas de déformation plane, sauf pour les coefficients de la matrice d'élasticité $[D]$. Nous appliquons la formule (A.32) au lieu de (A.31).

Dans Ω^{2+} ($0 \leq y_2 \leq 1/2$), les composantes du terme $\underline{v}^{1(2+)}$ sont données par:

$$\left\{ \begin{aligned} v_1^{1(2+)} &= \left[\frac{E_3(1+v_2)}{E_2(1+v_3)} u_{1,2}^{0+}(x_1, 0) + \frac{E_3(1+v_2) - E_2(1+v_3)}{E_2(1+v_3)} u_{2,1}^{0+}(x_1, 0) \right] y_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \frac{E_2(1+v_3) - E_3(1+v_2)}{E_2(1+v_3)} [u_{1,2}^{0+}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0+}(x_1, 0)] + u_1^{1+}(x_1, 0) \\ v_2^{1(2+)} &= \left[\frac{\frac{E_3 v_3}{1-v_3^2} - \frac{E_2 v_2}{1-v_2^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{1,1}^{0+}(x_1, 0) + \frac{\frac{E_3}{1-v_3^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{2,2}^{0+}(x_1, 0) \right] y_2 + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{E_2 v_2}{1-v_2^2} - \frac{E_3 v_3}{1-v_3^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{1,1}^{0+}(x_1, 0) + \frac{\frac{E_2}{1-v_2^2} - \frac{E_3}{1-v_3^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{2,2}^{0+}(x_1, 0) \right] + u_2^{1+}(x_1, 0) \end{aligned} \right. \quad (\text{A.49})$$

Dans Ω^{2-} ($-1/2 \leq y_2 \leq 0$), les composantes du terme $\underline{v}^{1(2-)}$ sont données par:

$$\left\{ \begin{aligned} v_1^{1(2-)} &= \left[\frac{E_1(1+v_2)}{E_2(1+v_1)} u_{1,2}^{0-}(x_1, 0) + \frac{E_1(1+v_2) - E_2(1+v_1)}{E_2(1+v_1)} u_{2,1}^{0-}(x_1, 0) \right] y_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{E_1(1+v_2) - E_2(1+v_1)}{E_2(1+v_1)} \left[u_{1,2}^{0-}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0-}(x_1, 0) \right] + u_1^{1-}(x_1, 0) \\ v_2^{1(2-)} &= \left[\frac{\frac{E_1 v_1}{1-v_1^2} - \frac{E_2 v_2}{1-v_2^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{1,1}^{0-}(x_1, 0) + \frac{\frac{E_1}{1-v_1^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{2,2}^{0-}(x_1, 0) \right] y_2 + \\ &+ \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{E_1 v_1}{1-v_1^2} - \frac{E_2 v_2}{1-v_2^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{1,1}^{0-}(x_1, 0) + \frac{\frac{E_1}{1-v_1^2} - \frac{E_2}{1-v_2^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{2,2}^{0-}(x_1, 0) \right] + u_2^{1-}(x_1, 0) \end{aligned} \right. \quad (A.50)$$

Les conditions de continuité des termes intérieurs $\underline{v}^{1(2+)}$ et $\underline{v}^{1(2-)}$ pour $y_2 = 0$ conduisent aux sauts des termes extérieurs \underline{u}^{1+} et \underline{u}^{1-} à travers l'interface Γ^{13} :

$$\left\{ \begin{aligned} \llbracket u_1^1 \rrbracket &= \frac{E_1(1+v_2) - E_2(1+v_1)}{E_2(1+v_1)} \left[u_{1,2}^{0-}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0-}(x_1, 0) \right] + \\ &+ \frac{E_3(1+v_2) - E_2(1+v_3)}{E_2(1+v_3)} \left[u_{1,2}^{0+}(x_1, 0) + u_{2,1}^{0+}(x_1, 0) \right] \\ \llbracket u_2^1 \rrbracket &= \frac{\frac{E_1 v_1}{1-v_1^2} - \frac{E_2 v_2}{1-v_2^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{1,1}^{0-}(x_1, 0) + \frac{\frac{E_1}{1-v_1^2} - \frac{E_2}{1-v_2^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{2,2}^{0-}(x_1, 0) + \\ &+ \frac{\frac{E_3 v_3}{1-v_3^2} - \frac{E_2 v_2}{1-v_2^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{1,1}^{0+}(x_1, 0) + \frac{\frac{E_3}{1-v_3^2} - \frac{E_2}{1-v_2^2}}{\frac{E_2}{1-v_2^2}} u_{2,2}^{0+}(x_1, 0) \end{aligned} \right. \quad (A.51)$$

Annexe B

Courbes de température au cours du brasage

Annexe B	Courbes de température au cours du brasage	267
B.1.	Disposition des thermocouples	267
B.2.	Courbes de température.....	268

Annexe B

Courbes de température au cours du brasage

Dans cette annexe, nous présentons la disposition des thermocouples et les courbes de température mesurées par ces thermocouples au cours des essais de brasage du chapitre 5.

B.1. Disposition des thermocouples

Afin de vérifier l'homogénéisation de la température dans la zone chaude au cours du brasage, on a disposé trois thermocouples (en étiquette de voies 1, 3 et 4 respectivement) aux trois faces différentes des éprouvettes (cf. Figure B.1).

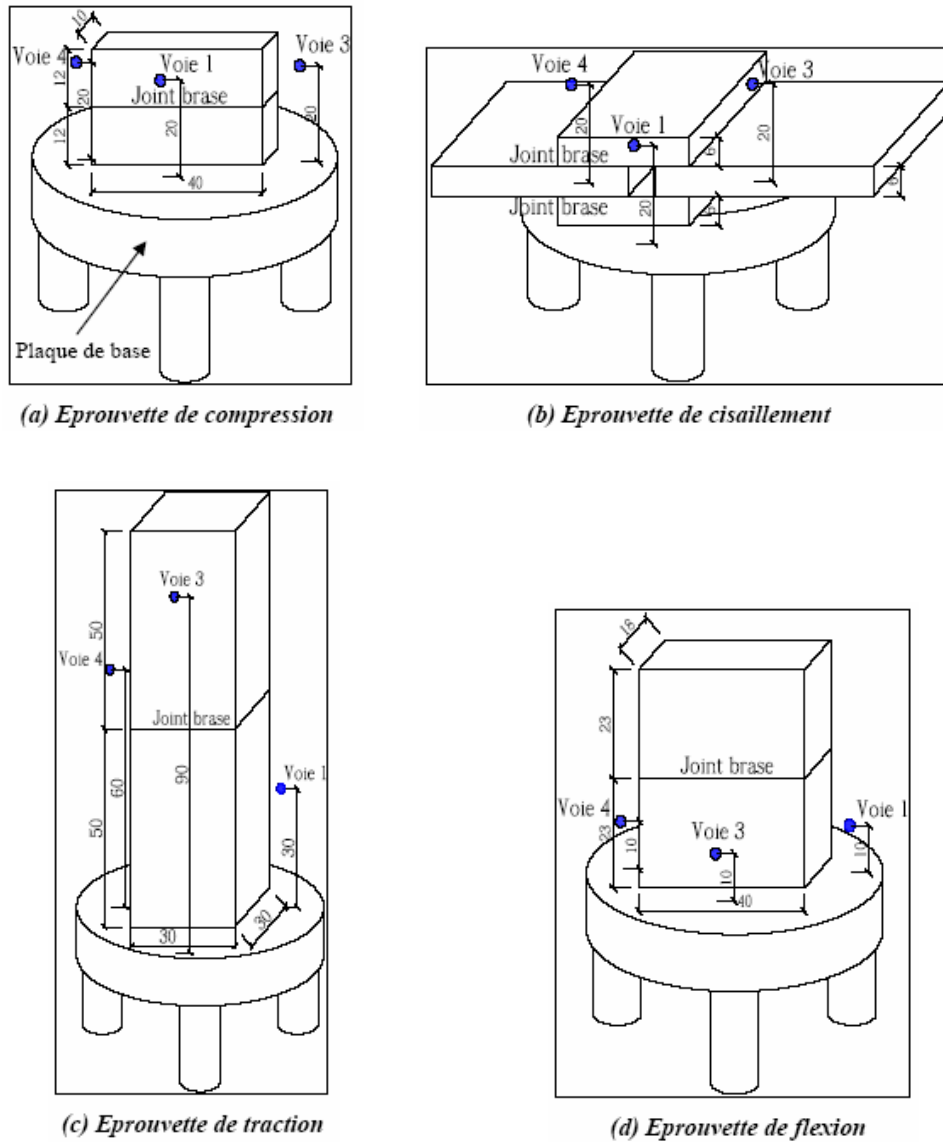
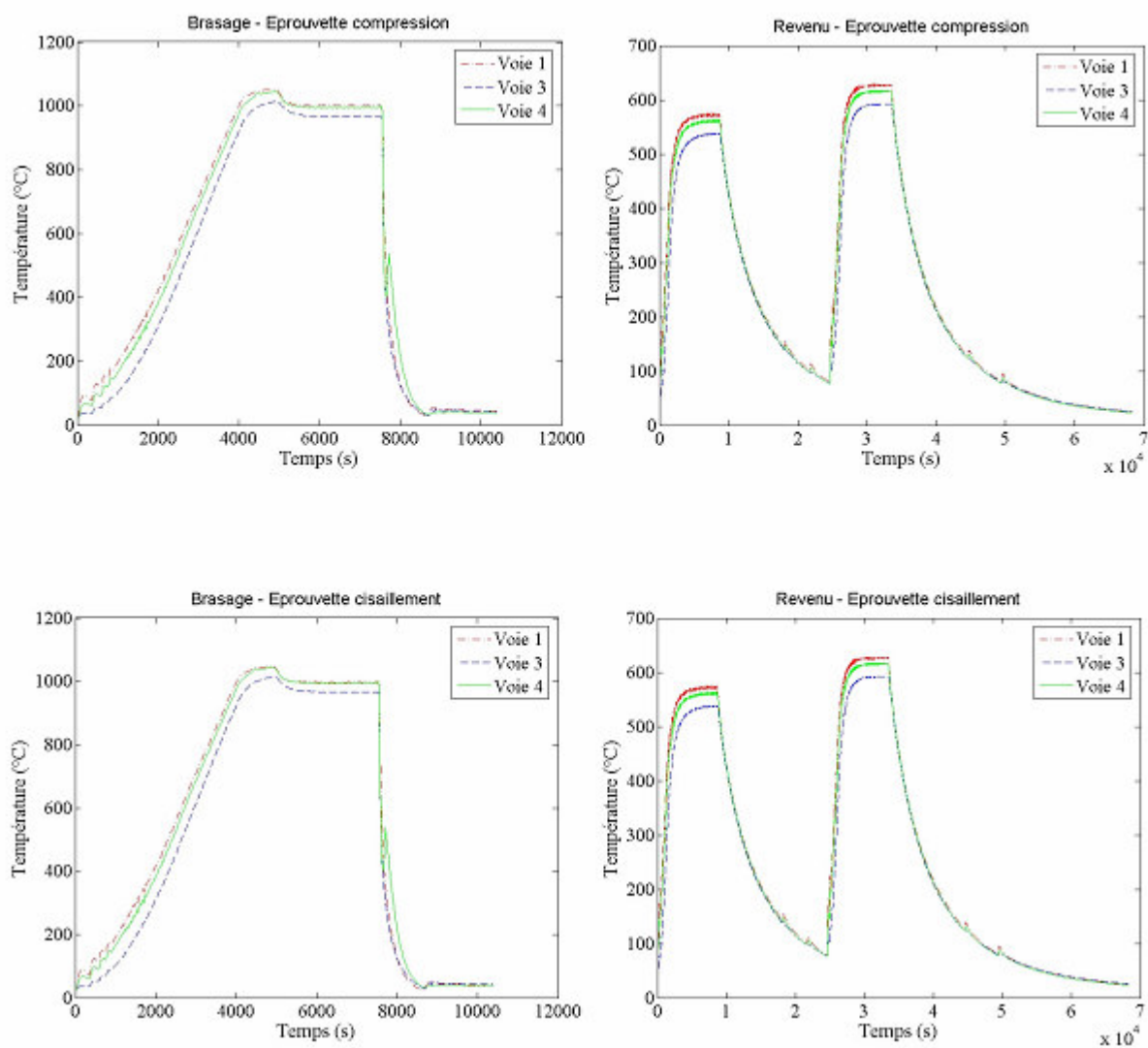


Figure B.1: Positionnement des thermocouples

B.2. Courbes de température

Sur la Figure B.2, pour chaque type d'éprouvette à braser, les courbes de température mesurées par les trois thermocouples sont présentées pour les deux cycles: cycle de brasage et cycle de revenus.



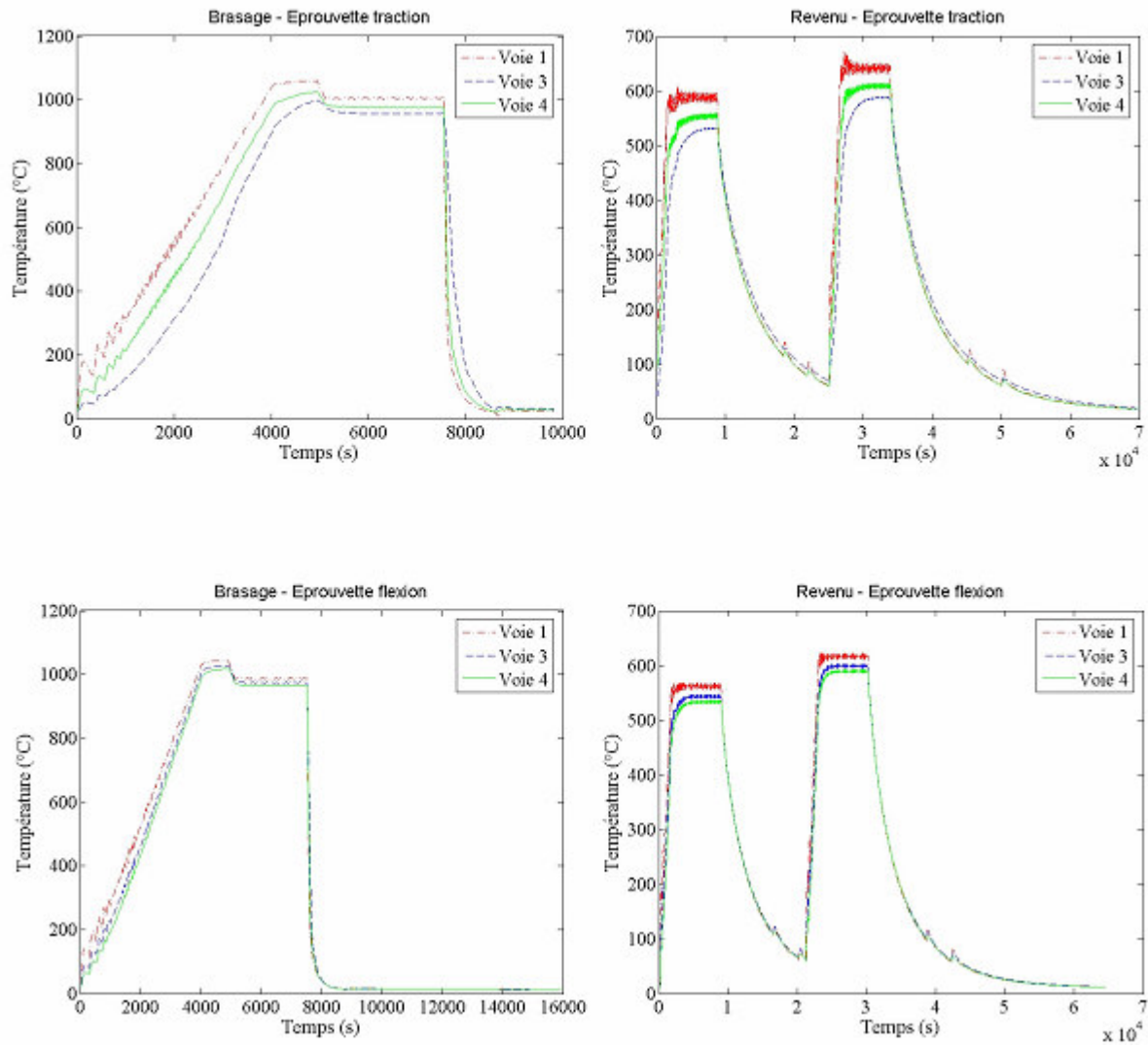


Figure B.2: Courbes de température mesurées par les thermocouples au cours du brasage

Résumé

Les assemblages stratifiés par procédé de brasage sont de plus en plus utilisés dans le secteur de l'outillage rapide appliqué à la fonderie, la plasturgie... Cette méthode d'assemblage permet par exemple des géométries originales et le placement de canaux de refroidissement à des positions optimales qu'il est impossible d'atteindre par perçage. Dans la plupart des cas d'application, les assemblages brasés doivent résister aux sollicitations mécanique et thermique en service. Cette recherche est une contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement des assemblages brasés aussi bien du point de vue mécanique que thermique. Les inconvénients des méthodes classiques de modélisation pour traiter des géométries complexes avec des zones raffinées très localisées (affinement extrême du maillage, temps de calcul excessif) nous ont poussés à rechercher une nouvelle méthode pour traiter les problèmes des assemblages brasés. En gérant la présence du joint dans l'assemblage sous forme d'une perturbation, nous avons proposé le couplage de deux méthodes: la méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) et la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). La construction de la partie enrichie de la X-FEM est basée sur les solutions proposées par la méthode des DAR suivant cinq variantes d'enrichissement. Les principes fondamentaux ainsi que les méthodes de mise en œuvre du couplage DAR-X-FEM sont présentés à travers le cas unidimensionnel des assemblages brasés. En appliquant la variante d'enrichissement la plus appropriée, le couplage DAR-X-FEM a été étendu par la suite pour modéliser le cas bidimensionnel des assemblages brasés. L'illustration du couplage DAR-X-FEM 2D a été effectuée pour les deux applications: transferts thermiques et chargement mécanique. Afin de mieux comprendre le comportement des assemblages brasés et de valider les résultats obtenus par le couplage DAR-X-FEM, une étude expérimentale a été présentée. Dans un premier lieu, les essais de brasage à haute température ont été effectués. En deuxième lieu, les éprouvettes d'assemblages brasés obtenues par brasage ont fait l'objet d'essais de caractérisation des propriétés mécaniques et thermiques. Enfin, la comparaison entre les résultats expérimentaux et de la modélisation a permis de vérifier la pertinence du couplage DAR-X-FEM proposé.

Mots clefs: méthode des éléments finis étendus (X-FEM), méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR), assemblage brasé, joint brasé.

Abstract

Laminar assembly by the means of the brazing process is becoming widely used in the field of rapid tooling used for die casting, plastic injection moulding... In most applications, the brazed assembly must withstand the in-service mechanical and thermal solicitations. This research is a contribution to the modelling and the characterisation of the behaviour of brazed assembly in both mechanical and thermal aspects. The deficiencies of the classical modelling methods when modelling of a complex structure with localised variations is concerned led us to search for a new method to treat the problems of brazed assemblies. Considering the presence of the joint in the assembly as a perturbation in a broad structure, we have proposed the coupling of two methods: the matched asymptotic expansions method (DAR) and the extended finite element method (X-FEM). The construction of the enriched part of the X-FEM is derived into five variants of enrichment using the perturbation solutions obtained by the DAR method. The basic principles and methods of implementation of the DAR-X-FEM coupling have been presented through the one-dimensional example of brazed assembly. Applying the most appropriate variant of enrichment, the DAR-X-FEM coupling was subsequently extended to the two-dimensional case of brazed assemblies. The illustration of coupling DAR-X-FEM 2D was performed for two problems: heat transfer and mechanical loading. To better understand the behaviour of brazed assembly and to validate the results obtained by the coupling DAR-X-FEM, an experimental study has been presented. Firstly, high temperature brazing tests have been carried out. Secondly, the brazed specimens were tested to characterize both mechanical and thermal properties. Lastly, the comparison between the experimental and the simulation results confirmed all the interest of the proposed coupling DAR-X-FEM.

Keywords: eXtended Finite Element Method (X-FEM), matched asymptotic development method (DAR), brazed assembly, brazed joint.

Résumé

Les assemblages stratifiés par procédé de brasage sont de plus en plus utilisés dans le secteur de l'outillage rapide appliqué à la fonderie, la plasturgie... Cette méthode d'assemblage permet par exemple des géométries originales et le placement de canaux de refroidissement à des positions optimales qu'il est impossible d'atteindre par perçage. Dans la plupart des cas d'application, les assemblages brasés doivent résister aux sollicitations mécanique et thermique en service. Cette recherche est une contribution à la modélisation et à la caractérisation du comportement des assemblages brasés aussi bien du point de vue mécanique que thermique. En gérant la présence du joint dans l'assemblage sous forme d'une perturbation, nous avons proposé le couplage de deux méthodes: la méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR) et la méthode des éléments finis étendus (X-FEM). La construction de la partie enrichie de la X-FEM est basée sur les solutions proposées par la méthode des DAR

Mots clefs: méthode des éléments finis étendus (X-FEM), méthode des développements asymptotiques raccordés (DAR), assemblage brasé, joint brasé.

Abstract

Laminar assembly by the means of the brazing process is becoming widely used in the field of rapid tooling used for die casting, plastic injection moulding... In most applications, the brazed assembly must withstand the in-service mechanical and thermal solicitations. This research is a contribution to the modelling and the characterisation of the behaviour of brazed assembly in both mechanical and thermal aspects. Considering the presence of the joint in the assembly as a perturbation in a broad structure, we have proposed the coupling of two methods: the matched asymptotic expansions method (DAR) and the extended finite element method (X-FEM). The construction of the enriched part of the X-FEM is derived into five variants of enrichment using the perturbation solutions obtained by the DAR method.

Keywords: eXtended Finite Element Method (X-FEM), matched asymptotic development method (DAR), brazed assembly, brazed joint.